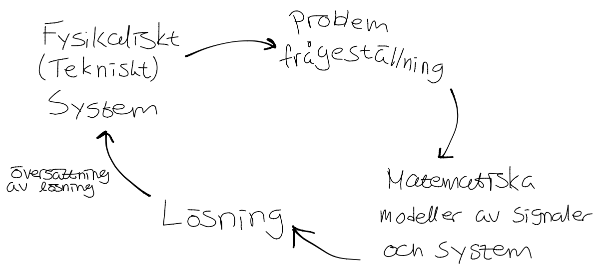
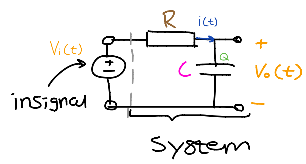
Transformer, signaler och system

I kursen studerar vi tekniska (fysikaliska) system. Vi kan t.ex. vara intresserade av hur de reagerar på olika excitering (insignal). Vi kommer i vå kurs att begränsa oss till system med en insignal och en utsignal. Vi använder oss av matte-modeller för att beskriva signaler (funktioner) och system (ekvationer, mm).



Ex

Elektriskt system.



Sökt
Utsignal $(V_o(t))$
Spänningen över C

Låt $Q(t)$ vara laddning över C.

$\int_0^t i(t)dt + Q_0$ $\quad Q_0$ är begynnelsevärde vid $t=0$. Låt $Q_0=0$.

För en kapacitans gäller att $Q(t) = C \cdot V_o(t)$

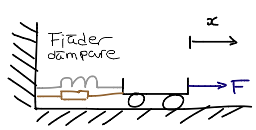
Deriverar vi $\Rightarrow$ $i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \cdot \frac{dV_o(t)}{dt} = C\dot{V}_o(t)$

Kirchoffs: $-V_i(t) + R \cdot i(t) + V_o(t) = 0$

Eliminera $i(t)$: $-V_i(t) + RC \cdot \dot{V}_o(t) + V_o(t) = 0$

$RC\dot{V}_o(t) + V_o(t) - V_i(t) = 0$ $\quad$ En diffekvation av första graden.

Mekaniskt system



$F(t)$: Insignal (kraft)
$x(t)$: Utsignal (läge)

Kraft som påverkar vagnen: $F(t) - \underset{\text{Fjäder}}{kx(t)} - \underset{\text{Dämpare}}{d\dot{x}(t)}$

Newton: $F(t) - kx(t) - d\dot{x}(t) = ma = m\ddot{x}(t)$

$\ddot{x}(t) + \frac{d}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}F(t)$ $\quad$ Andra ordningens DE.

Klassificering av Signaler

Kontinuerlig (tid) $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$
Diskret (tid) $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$

Kontinuerlig amplitud $\left.\begin{matrix} x(t) \\ x[n] \end{matrix}\right\} \in \mathbb{R}$

Diskret amplitud $\left.\begin{matrix} x(t) \\ x[n] \end{matrix}\right\}$ kvantiserad

Jämn $x(t) = x(-t)$ $\forall t$
$x[n] = x[-n]$ $\forall n$

Udda $x(t) = -x(-t)$ $\forall t$
$x[n] = -x[-n]$ $\forall n$

Periodisk signal $x(t) = x(t+T) \quad \forall t$

Ex: Sinusformade signaler   T: Periodtid

Triangelvåg

Fyrkantsvåg

⋮

$x[n] = x[n+N] \quad \forall n, \; n \in \mathbb{Z}^+$

Deterministisk signal

Stokastisk signal

Energisignal

Total energi för en signal. $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ Om energin är begränsad, $0 < E < \infty$, energisignal

$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$

Effektsignal

Medeleffekt $P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ Om $0 < P < \infty$, är x en effektsignal

$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$

Notera!

För en energisignal är medeleffekten alltid noll. $P \to 0 \quad (E < \infty)$

För en effektsignal går energin mot inf. $E \to \infty$

Signalmanipulering (Signaltransformering)

- Amplitudskalning
  $y(t) = a\,x(t) + b$ $\qquad$ $y[n] = a\,x[n] + b$ ← "Skift" (DC-skift)
  ↑ Förstärkning eller dämpning $\qquad$ a & b är konstanter

- Ändra tidsskala
  $y(t) = x(at) \quad a \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $y[n] = x[kn] \quad x, k \in \mathbb{Z}$

- Spegling
  $y(t) = x(-t) \quad \forall t$ $\qquad$ $y[n] = x[-n]$

- Skift
  $y(t) = x(t - t_0) \quad t_0$ konstant $\qquad$ $y[n] = x[n - n_0] \quad n_0$ konst

Samtidiga Manipulationer

$x(t)$	$x(t)$
Ändra tidsskala $t \to at \Rightarrow x(at)$	Skifta $t \to t - t_0' \Rightarrow x(t - t_0')$
Skifta $t \to t - t_0 \Rightarrow x(a(t - t_0))$	Ändra tidsskala $t \to at \Rightarrow x(at - t_0')$
Resultat: $x(at - at_0)$	

Ordning spelar roll!

Signalmodeller

Kontinuerliga

- Komplex exponential
  $x(t) = C \cdot e^{at} \quad C, a \in \mathbb{C} \Rightarrow x \in \mathbb{C}$

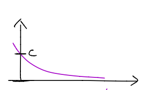
  Komplexa signaler förekommer ej i fysikaliska system men är mycket användbara som matematiska modeller.

  Den fysikaliska signalen kan t.ex. fås som $\mathrm{Re}\{x(t)\}$.

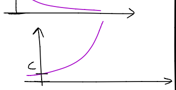
Fall 1 $\quad C, a \in \mathbb{R}$

$x(t) = C \cdot e^{at}$

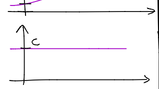
Om $a < 0$



Om $a > 0$



Om $a = 0$



Diskreta

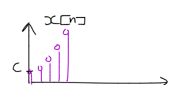
- Komplex exponential

  $x[n] = C \cdot a^n \quad C, a \in \mathbb{C} \Rightarrow x \in \mathbb{C}$
  $n \in \mathbb{Z}$

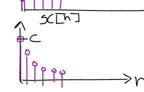
Fall 1 $\quad C, a \in \mathbb{R}$

$x[n] = C \cdot a^n$

Låt $a > 1$



Låt $0 < a < 1$



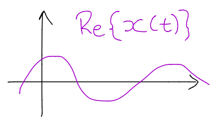
Låt $a < 0$ $\quad$ Teckenväxling

Fall 2 $C, a \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}\{a\}=0$

Låt $a = j\omega_0$, $C = Ae^{j\Phi}$

$$x(t) = Ae^{j\Phi} \cdot e^{j\omega_0} = Ae^{j(\omega_0 t + \Phi)} =$$
$$A\cos(\omega_0 t + \Phi) + Aj\sin(\omega_0 t + \Phi)$$

"Odämpad sinusformad signal"

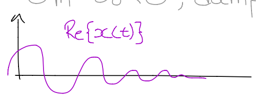


Fall 3 $C, a \in \mathbb{C}$

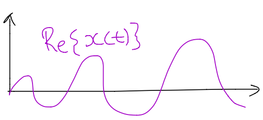
Låt $C = Ae^{j\Phi}$
$a = \sigma_0 + j\omega_0$

$$x(t) = C \cdot e^{at} = Ae^{j\Phi} \cdot e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} \cdot e^{j(\omega_0 \cdot t + \Phi)} =$$
$$Ae^{\sigma_0 t}(\cos(\omega_0 t + \Phi) + j\sin(\omega_0 t + \Phi))$$

Om $\sigma_0 < 0$, dämpad sinusformad svängning



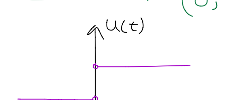
Om $\sigma_0 > 0$, förstärkt sinusformad svängning



Om $\sigma_0 = 0 \Rightarrow$ Fall 2

α Enhetssteg (kontinuerlig)

Def $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



Vi låter $u(0)$ vara odef.
Det finns de som definierar $u(0)$ som 0, 1 eller $\frac{1}{2}$.

α Enhetsimpuls
(Ingen vanlig funktion, den sorterar under distributionen.)

Beskrivning
$\delta(t) = 0$, $t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

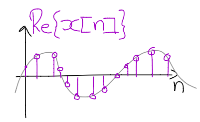
Amplituden vid $t=0$ är obegränsad

Fall 2 $C, a \in \mathbb{C}$

Låt $|a| = 1$
Låt $a = e^{j\Omega_0}$
$C = Ae^{j\Phi}$

$$x[n] = Ae^{j\Phi} \cdot e^{j\Omega_0 n} = Ae^{j(\Omega_0 n + \Phi)}$$
$$= A \cdot \cos(\Omega_0 n + \Phi) + jA\sin(\Omega_0 n + \Phi)$$

Diskret odämpad sinusformad signal



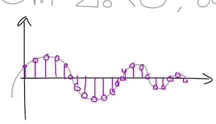
Fall 3 $C, a \in \mathbb{C}$

Låt $C = Ae^{j\Phi}$
$a = e^{\Sigma_0} \cdot e^{j\Omega_0} = e^{\Sigma_0 + j\Omega_0}$

$$x[n] = Ae^{j\Phi} \cdot e^{(\Sigma_0 + j\Omega_0)n} = Ae^{\Sigma_0 n} \cdot e^{j(\Omega_0 n + \Phi)} =$$
$$A \cdot e^{\Sigma_0 n}(\cos(\Omega_0 n + \Phi) + j\sin(\Omega_0 n + \Phi))$$

Diskret sinusformad svängning med n-beroende amplitud

Om $\Sigma_0 < 0$, amplitud minskar

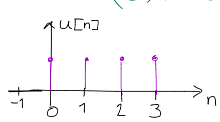


Om $\Sigma_0 > 0$, amplitud ökar

α Enhetssteg (diskret)

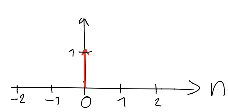
$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$, $u[n] = (\ldots, 0, 0, \underline{1}, 1, 1, \ldots)$

n=0



α Diskret enhetsimpuls

$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$

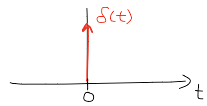


Samband

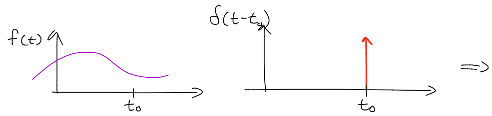
$$u[n] = \sum_{-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Grafisk beskrivning



Enhetsimpulsen definieras genom sina egenskaper. Låt f(t) vara en godtycklig funktion (signal) som är kontinuerlig för $t=t_0$.



$$f(t)\cdot\delta(t-t_0)=f(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$$

vidare gäller även

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt=f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt$$

$$=f(t_0)\cdot 1=f(t_0)$$

Samband: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$

$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$

Repetition

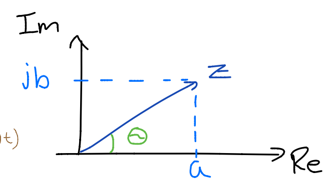
Eulers formel.

Polar form: $e^{i\theta}=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$

$Ae^{j\omega t}=A\cos(\omega t)-jA\sin(\omega t)$

$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$

$j\sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2}$



$Z=\sqrt{a^2+b^2}$

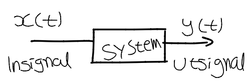
$\Theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ om $a>0$

$\Theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi$ om $a<0$

System

En process där det finns en relation mellan "orsak och verkan".

- Orsak (exitering) är vår insignal
- Verkan = Utsignal

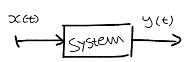


En matematisk enhetsimpuls används för att beskriva systemet. (Ett fysikaliskt/tekniskt) Vi har sett två exempel, elektriskt och mekaniskt, på system och samband mellan in och utsignal beskrevs med diffekv.

Systemegenskaper

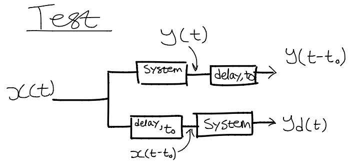
∝ Tidsinvariant

För ett tidsinvariant system gäller:



Insig	Utsig
$x(t)$	$y(t)$
$x(t-t_0)$	$y(t-t_0)$

Test



Om $y_d(t) = y(t-t_0)$ är systemet tidsinvariant.

Motsvarande gäller även för ett diskret system.

∝ Linjärt

För ett linjärt system gäller att:

Insig	Utsig
$x(t)$	$y(t)$
$ax(t)$	$ay(t)$
$x_1(t)$	$y_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t)$
$x_1(t)+x_2(t)$	$y_1(t)+y_2(t)$
$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)+\dots$	$a_1y_1(t)+a_2y_2(t)+\dots$

a är konstant (homogent)

"additivt"

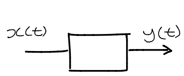
Superposition

∝ Stabilitet

Ett system är stabilt om: Insignalen är begränsad och detta resulterar i en begränsad utsignal. [BIBO: Bounded Input Bounded Output]

$$|x(t)| < M_x < \infty \Rightarrow |y(t)| < M_y < \infty \quad , \forall t$$

∝ Kausalitet



Ett system är kausalt om utsignalen endast beror av det samtida eller tidigare värdet/värden på insignalen. $x(t-t_0),\ t \geq 0$

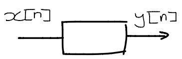
Alla fysikaliska system är kausala.

Motsvarande egenskaper för diskreta system finns i kursen.

∝ Minne/Dynamiskt

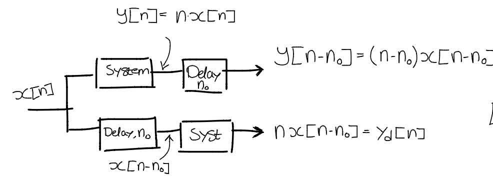
Ett system har minne om dess utsignal vid tidpunkten t_0, $y(t_0)$ fler insignalvärden än $x(t_0)$. Ex: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$ Ett minneslöst system är ett statiskt system. Ex: $y(t) = k \cdot x(t)$

Ex
Diskret System



$y[n] = n \cdot x[n]$

Tidsinvariant?



Ej tidsinvariant.

Linjärt?

In	Ut
$x_1[n]$	$y_1[n] = n \cdot x_1[n]$
$x_2[n]$	$y_2[n] = n x_2[n]$
$x[n] = a x_1[n] + b \cdot x_2[n]$	$y[n] = n \cdot x[n] = n(a x_1[n] + b x_2[n]) =$
	$a n x_1[n] + b n x_2[n] =$
	$a y_1[n] + b y_2[n] \Rightarrow$ Linjärt

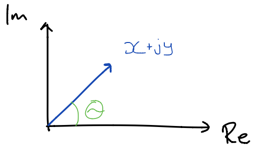
Kausalt?
Ja

Minne?
Nej

Stabilt?
Nej, även om $|x[n]|$ är begränsad kan $n \to \infty$.

Komplexa tal

$Z = x + jy \,,\quad x, y \in \mathbb{R} \,,\quad j^2 = -1$



$$x + jy = r\underbrace{(\cos\theta + j\sin\theta)}_{e^{j\theta}} \sim \begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Polärform

Additionsformel: $e^{j(\theta+\Phi)} = e^{j\theta} \cdot e^{j\Phi}$ för alla θ och Φ

Trigonometriska ~~ekvan~~: $|z| = r = (x^2+y^2)^{1/2}$

$|e^{j\theta}| = 1$ för alla θ $\quad |e^{j\theta}| = |\cos\theta + j\sin\theta| = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{1/2} = 1$

Konjugat: $\overline{Z} = x - jy$

$z \cdot \overline{z} = |z^2| = r^2 > 0$

Serier

$a_0, a_1, a_2, \dots$ komplexa tal

$\sum_{k=0}^{N} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_N$

$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} a_k$ $\quad$ Vad betyder det att en summa konvergerar?

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} S_N$ (om det hela konvergerar) och vi kaller det summan av $a_0, a_1, a_2, \dots$

Geometriska serier

$a_k = b^k$, för ngt komplext tal b

$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} b^k$ $\qquad bS_N = \sum_{k=0}^{N-1} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{N} b^k = S_N - 1 + b^N \Rightarrow S_n(1-b) = 1 - b^N \Rightarrow S_N = \frac{1-b^N}{1-b}$

Vad händer om $|b| < 1$?, $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} b^k = \frac{1-b^N}{1-b} \longrightarrow \frac{1}{1-b}$, $N \to \infty$ $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b}$

Harmoniska serier

$\alpha \in \mathbb{R}$ & $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{existerar om } \alpha > 1 \\ = +\infty \text{ om } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Partialbråk

Kan vi skriva bråket $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ för några A, B?

① $\frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$x\underbrace{(A+B)}_{=0} \underbrace{-2A-B}_{=1} = 1$

$$\left.\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -B \Rightarrow -2(-B) - B = 1 \Rightarrow 2B - B = 1 \Rightarrow B = 1 \right\} \Rightarrow -2A - 1 = 1 \Rightarrow -2A = 2 \Rightarrow A = -1$$

Svar: $\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

② (Handpåläggning)

Multiplicera bägge ~~led~~ med nämnaren i $\frac{A}{(x+n)}$.
Sätt in x så $(x+n) = 0$. Detta ger A.
Gör om för B.

Periodiska Signaler

En signal är en funktion $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ Tidsdiskret
$n \longmapsto x[n]$

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Tidskontinuerlig

x är N-periodisk om $x[n+N] = x[n]$ för alla n. och $N \neq 0$
En tråkig sådan är $x[n] = 1$ för alla n.
En roligare: $x[n] = e^{2\pi j \frac{n}{N}}$, N fixt heltal

$$x[n+N] = e^{2\pi \frac{(n+N)}{N}} = e^{2\pi j \frac{n}{N}} \cdot e^{2\pi j \frac{N}{N}} = e^{2\pi j} \cdot x[n] = x[n]$$

Övning

2.8 b)

$x[n] = e^{j5n}$ (Periodisk för något N?)

$X[n+N] = e^{j5(n+N)} = e^{j5n} \cdot e^{j5N} \overset{?}{=} x[n] = e^{j5n}$ för alla n?

Periodisk innebär att $e^{j5N} = 1$. När gäller det att $e^{j\Theta} = 1$?

$\underbrace{(\cos\Theta + j\sin\Theta)}_{=0}$ $\begin{cases} \sin\Theta = 0 \Leftrightarrow \Theta = a\pi & a \in \mathbb{Z} \\ \cos\Theta = 1 \Leftrightarrow \Theta = 2\pi b & b \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Stämmer om π är rationellt.

Summa summarum: $5N = 2\pi b \Leftrightarrow \pi = \frac{5N}{2b}$

Pi är inte rationellt. $\Rightarrow$ Det finns inget N som gör x periodisk.

Om det varit en tidskontinuerlig signal. $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
$t \longmapsto x(t)$

x är T-periodisk om $x(t+T) = x(t)$ för alla reella t.

2.8b')

$x(t) = e^{j5T}$ (T-periodisk?)

$T \in \mathbb{R} \Rightarrow$ det funkar

$x(t+T) = e^{j5(t+T)} = e^{j5t} \cdot e^{j5T} = x(t) = e^{j5t} \Rightarrow e^{j5T} = 1 \Rightarrow 5T = 2\pi b,\ b \in \mathbb{Z} \Rightarrow T = \frac{2\pi b}{5}$

Fundamentalperiod

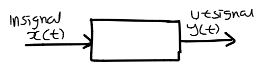
2.8d)

$x[n] = e^{j0.3\frac{n}{\pi}}$ (Periodisk?)

$x[n+N] = e^{j0.3\frac{(n+N)}{\pi}} = e^{j0.3\frac{n}{\pi}} \cdot e^{j0.3\frac{N}{\pi}} = x[n] = e^{j0.3\frac{n}{\pi}} \Rightarrow e^{j0.3\frac{N}{\pi}} = 1 \Rightarrow \frac{3N}{10\pi} = 2\pi b,\ b \in \mathbb{Z} \Rightarrow N = \frac{20\pi^2 b}{3}$

π^2 är ej rationellt!

I kursen studerar vi LTI-system. Ett vanligt sätt att karakterisera ett system är att ange dess utsignal för en väl definierad insignal.



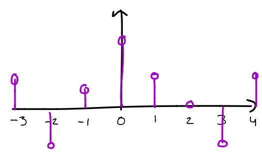
$x(t)$	$y(t)$
$\delta(t)$, enhetsimp	$h(t)$ impulssvar
$u(t)$, enhetssteg	$y_s(t)$ stegsvar
sinusformad	frekvenssvar

⟵ Motsvarande gäller för ett diskret system.

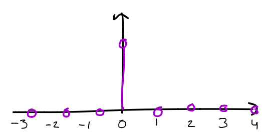
Samband mellan insignal, utsignal och ~~ett~~ LTI-system

Diskret fall

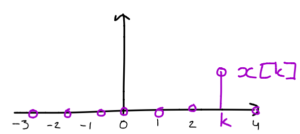
Antag att vi känner impulssvaret $h[n]$ till ett diskret LTI-system. $x[n]$ är en godtycklig diskret insignal.



Bilda $x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$



Vidare bildar vi $x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$



Tydligen kan vi teckna $x[n]$ som en summa av viktade och skiftade impulser.

$$x[n] = \ldots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

För ett LTI-system gäller:

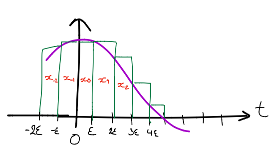
Insignal	Utsignal
$\delta[n]$	$h[n]$
$\delta[n-k]$	$h[n-k]$
$x[k]\delta[n-k]$	$x[k]h[n-k]$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$	$y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]}_{\text{Faltningssumma/ Convolution sum}}$

Förenklat skrivsätt: $y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

Variabelsubstitution

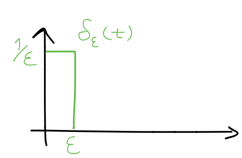
Kontinuerligt fall

Antag att vi känner impulssvaret $h(t)$ till ett kontinuerligt LTI-system. Låt $x(t)$ vara en godtycklig insignal.



Låt $\hat{x}(t)$ utgöra en approximation av $x(t)$ där $\hat{x}(t)$ är en summa av pulsen $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$

Vi definierar en enhetspuls som $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \le t < \varepsilon \\ 0, & \text{other} \end{cases}$



Våra pulser kan vi nu teckna som $x_{-1} = \delta_\varepsilon(t+\varepsilon)x(-\varepsilon)\varepsilon$ och $\hat{x}(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-k\cdot\varepsilon)x(k\cdot\varepsilon)\varepsilon$

$x_0 = \delta_\varepsilon(t)x(0)\varepsilon$

$x_1 = \delta_\varepsilon(t-\varepsilon)x(\varepsilon)\cdot\varepsilon$

$\vdots$

Låt $h_\varepsilon(t)$ vara systemets utsignal för insignalen $\delta_\varepsilon(t)$. För ett LTI-system gäller då

Insignal	Utsignal
$\delta_\varepsilon(t)$	$h_\varepsilon(t)$
$\delta_\varepsilon(t-k\varepsilon)$	$h_\varepsilon(t-k\varepsilon)$
$\delta_\varepsilon(t-k\varepsilon)\cdot\underbrace{x(k\varepsilon)\varepsilon}_{\text{Konst}}$	$h_\varepsilon(t-k\varepsilon)\cdot x(k\varepsilon)\varepsilon$
$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_\varepsilon(t-k\varepsilon)x(k\varepsilon)\varepsilon}_{\hat{x}(t)}$	$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_\varepsilon(t-k\varepsilon)x(k\varepsilon)\varepsilon}_{\hat{y}(t)}$

Låt $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \delta_\varepsilon(t) \longrightarrow$ enhetsimpuls $= \delta(t)$

$h_\varepsilon(t) \to h(t)$

$k\varepsilon \longrightarrow \tau$, en kontinuerlig variabel

$\varepsilon \longrightarrow d\tau$

$\sum \longrightarrow \int$

$\hat{x}(t) \longrightarrow x(t)$

$\hat{y}(t) \longrightarrow y(t)$

Vi får $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ Faltningsintegralen. Förkortas: $y(t) = h(t) * x(t) \overset{\text{Variabelsubstitution}}{=} x(t) * h(t)$

Systemegenskaper kopplade till impulssvaret

- Kausalt LTI-system

Diskret Fall: $h[k]=0,\ k<0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Kontinuerligt Fall: $h(t)=0,\ t<0$

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Stabilt LTI-system

Diskret Fall

Antag $|x[n]| \leq M_x < \infty, \forall n$ Begränsad input

$y[n] = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|$ $\{|a+b| \leq |a|+|b|\}$

$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]|$ $\{|ab| \leq |a|\cdot|b|\}$

$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$

Men $|x[n]| \leq M_x$!

$y[n] \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$

För ett stabilt system måste utsignalen vara begränsad. $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ Impulssvaret ska vara absolut summerbart.

- Kontinuerligt

Visas på samma vis.

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$, absolutintegrerbart

Signal: funktion, $x : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ där $\mathcal{X} = (-\infty, \infty)$ kontinuerlig tid
$\mathcal{X} = \{\ldots -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ diskret tid
$\mathcal{X} = [0, T]$ periodisk kontinuerlig tid
$\mathcal{X} = \{0, 1, N-1\}$ periodisk diskret tid.

Tack till den stere komikern för anteckningarna!

System, funktion på signaler

$y(t) = (Sx)(t)$ ex $y(t) = x(2t)$ linjärt
$y(t) = x(t-1)$ linjärt
$y(t) = x(t)^2$

Linjärt

$S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 S(x_1) + \alpha_2 S(x_2)$

Tidsinvariant

$S x_{t_0} = y_{t_0}$ för alla t_0 där $x_{t_0}(t) = x(t - t_0)$

$y(t) = x(2t)$
$(S x_{t_0})(t) = x_{t_0}(2t) = x(2t - t_0)$
$y_{t_0}(t) = y(t - t_0) = x(2(t - t_0)) = x(2t - t_0)$ ej tidsinv!

Kausalt

$y(t)$ beror ej på $x(s)$ för $s > t$.

$y(t) = x(t-1)$ kausalt
$y(t) = x(t+1)$ EJ kausalt

Studera system $y(t) = (Sx)t$
$y''(t) - a y'(t) - b y(t) = x''(t) - c x'(t) - d x(t)$ + varianter

Hur löser man sånt här?

$y'(t) - a y(t) = x(t)$ $y(0)$ känd
Obs "$-a$" e^{-at}

$e^{-at} y'(t) - a e^{-at} y(t) = e^{-at} x(t)$
$\frac{d}{dt}\left(e^{-at} \cdot y(t)\right) = e^{-at} \cdot x(t)$
$e^{-at} \cdot y(t) = y(0) + \int_0^t e^{-a\tau} x(\tau)\, d\tau$
$y(t) = e^{at} \cdot y(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau$

Fråga? Är $y(t) = (Sx)(t)$ linjär? Tidsinv? Kausalt?
$y_1' - a y_1 = x_1$ $y_2' - a y_2 = x_2$

$\left.\begin{array}{l} y = y_1 + y_2 \\ x = x_1 + x_2 \end{array}\right\}$ $y_1' + y_2' - a(y_1 + y_2) = (y_1' - a y_1) + (y_2' - a y_2) = x_1 + x_2 = x$

$y_{t_0}(t) = y(t - t_0)$ $y_{t_0}'(t) - a y_{t_0}(t) = y'(t - t_0) - a y(t - t_0)$
$x_{t_0}(t) = x(t - t_0)$ $= x(t - t_0)$
$= x_{t_0}(t) \Rightarrow y(t_0) = S x_{t_0} \Rightarrow$ Tidsinv!

Ex

Lös $y''-3y'+2y=x$ $\quad y(0), y'(0)$ känd

Karakteristiska polynomet: $r^2-3r+2=0$

$r_1=1$, $r_2=2$

$z=y'-r_2y$

$Z(0)=y'(0)-2y(0)$

$z'-r_1z=y''-2y'-(y'-2y)=y''-3y'+2y=x$

$\underset{a=1}{z'-z}=x \Rightarrow z(t)=e^{t}z(0)+\int_0^t e^{t-T}x(T)\,dT$

allmän lösning

$\underset{a=2}{y'-2y}=z \Rightarrow y(t)=e^{2t}\cdot y(0)+\int_0^t e^{2(t-\tau)}z(\tau)\,d\tau$

Differensekvationer

$y[n]=(Sx)[n]$

$y[n]-ay[n-1]-by[n-2]=ex[n]-fx[n-1]-gx[n-2]$ + variationer

Ex

Känd insignal samt $y[0]$.

$\underbrace{y[n]-y[n-1]}_{\text{analogt med } y'}=x[n]$

Känd

$y[1]=y[0]+x[1]$

$y[2]=y[1]+x[2]=y[0]+x[1]+x[2]$

$y[3]=\ldots$

$y[n]=y[0]+\sum_{k=1}^{n}x[k]$

Ex

$y[n]-ay[n-1]=x[n]$

$y[1]=ay[0]+x[1]$

.....

$y[n]=a^n y[0]+\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}x[k]$

Ex

$y[n]-3y[n-1]+2y[n-2]=x[n]$

KE: $r^2-3r+2=0 \Rightarrow r_1=1$, $r_2=2$

$Z[n]=y[n]-2y[n-1]$

$Z[n]-1\cdot Z[n-1]=$

$y[n]-2y[n-1]-y[n-1]+2y[n-2]=$

$y[n]-3y[n-1]+2y[n-2]$

OBS! $a=2$

$y[n]-2y[n-1]=z[n]$

$Z[n]-Z[n-1]=x[n]$

$Z[n]=Z[0]+\sum_{k=1}^{n}x[k]$

$y[n]=2^n\cdot y[0]+\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}z[k]$

Allmän lösning!

Kända!

$Z[0]=y[0]-2y[-1]$

LTI-System

Tack till den stere komikern för anteckningarna!

$y(t) = (Sx)(t)$ där t.ex. $y'(t) - ay(t) = x(t) \Rightarrow y(t) = e^{at} \cdot y(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau$

Vanligt antagande: $y(0), x(\tau) = 0$ för alla $\tau < 0$.

$$y(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^t e^{a(t-\tau)} x(\tau)$$

pga $x(\tau) = 0, \tau < 0$

$\left\{ \text{Inför } h(t) = e^{at} u(t), \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \right\}$

All info finns i h.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(t-\tau)}_{=0 \text{ om } t<\tau} x(\tau) d\tau = (h * x)(t)$$

Impulssvar för systemet $y(t) = (Sx)(t)$

Mer allmänt

Varje system på formen $y(t) = (h * x)(t)$ är linjärt och tidsinvariant.

- Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$
- Kausalt $\Leftrightarrow h(t) = 0$ för alla $t < 0$

Kom ihåg!
$x_{t_0}(t) = x(t - t_0)$

Vi vill visa att $(Sx)(t) = y_{t_0}(t) = y(t_0 - t)$

Påverkar ej arean.

$$(Sx_{t_0})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x_{t_0}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) x(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h((t-t_0) - (\tau - \cancel{t_0})) x(\tau - \cancel{t_0}) d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h((t-t_0) - \tau) x(\tau) d\tau = y(t - t_0) = y_{t_0}(t) \Rightarrow S \text{ tidsinvariant.}$$

Ex

$y(t) = x(-t)$, linjärt

$$(Sx)(t) = x_{t_0}(-t) = x(-t - t_0) \neq y_{t_0}(t) = x(-(t - t_0)) = x(-t + t_0)$$

Fouriertransformer

$x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau < +\infty$ (integrerbar)

$X(j\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$, ω reellt   kallas för fouriertransformen av x.

Egenskaper

i) $\omega \mapsto X(j\omega)$ kontinuerlig + begränsad

ii) Om x_1, x_2 är integrerbara signaler och deras F-transformer $(X_1(j\omega) = X_2(j\omega))$ för alla ω gäller det att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau = 0$ (ty integrering över hela skiten) (Mycket Robert...)

- Om h, x är integrerbara och $y = h * x = Sx(t)$ så är y integrerbar och $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = F(x(\omega))$

- $F(h * x)(\omega) = (Fh)(\omega)(Fx)(\omega)$ om $y = h * x \Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$
- $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F x_1 + \alpha_2 F x_2$
- $x(t) = z(t - t_0) \rightsquigarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau - t_0) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau - \cancel{t_0}) e^{-j\omega(\tau - \cancel{t_0} + t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \cdot Z(j\omega)$

Antag $\lim_{t \to \pm\infty} Z(t) = 0$

- $x(t) = z'(t) \rightsquigarrow X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z'(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\left[z(t) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0,\ z \text{ integrerbar}} + j\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \cdot Z(j\omega)$
- Om $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)| d\omega < +\infty \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
- Om $x(t) = t z(t) \rightsquigarrow X(j\omega) = j Z'(j\omega)$ (*)

Ex

Antag att $y(t) = (h * x)(t)$

Om $x(t) = e^{-t} u(t)$ & $y(t) = t e^{-t} u(t)$ bestäm h (impulssvar).

Naivt: Lös ut h i: $t e^{-t} u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-t} d\tau$ (för alla t)

Kom ihåg att: $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)\tau} d\tau = \left[\frac{-e^{-(1+j\omega)\tau}}{1+j} \right]_0^{\infty} = \left[|e^{j\omega t}| = 1 \right] = \frac{1}{1 + j\omega}$$

OBS!

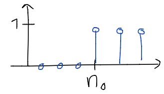
$y(t) = t z(t)$, $z(t) = e^{-t} u(t) \rightsquigarrow Z(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

Frekvenssvaret

(*) $\Rightarrow Y(j\omega) = j Z'(j\omega) = j \frac{-j}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{(1+j\omega)^2} \Rightarrow H = \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow h(t) = e^{-t} u(t)$

$F[e^{-t} u(t)]$

* Unit step: $u[n-n_0] = \begin{cases} 1 & , n \geq n_0 \\ 0 & , n < n_0 \end{cases} \Rightarrow$



$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$

* Unit impulse: $\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ 0 & , \text{other} \end{cases} \Rightarrow \delta[n] = u[n] - u[n-1]$

$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1 & , n = n_0 \\ 0 & , \text{other} \end{cases}$

<u>Shifting property</u>

$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$

Properties of CT-LTI:
* Memory less system (Output only depends on input)
* Invertible (One specific input $\Rightarrow$ one and only one specific output, injective)
* Causality (Output does not depend on the future)
* Stability
* Time invariant
* Linnear $\Rightarrow$ Additivity
  Homogenuos

2.4 c)

2.4[19] The signals in Figure 3 are zero except as shown.

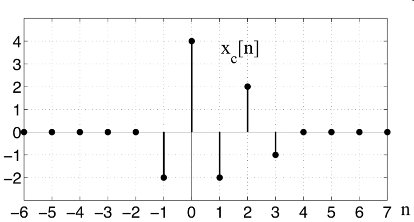
(a) For the signal $x_a[n]$ of Figure 3(a), plot the following

(i)	$x_a[-n]\ u[n]$	**(iv)**	$x_a[-n]\ u[-2-n]$
(ii)	$x_a[n]\ u[-n]$	**(v)**	$x_a[n]\ \delta[n-2]$
(iii)	$x_a[n]\ u[n+2]$	**(vi)**	$x_a[n]\ (\delta[n+1] + \delta[n-1])$

(b) Repeat (a) for the signal $x_b[n]$ of Figure 3(b).

(c) Repeat (a) for the signal $x_c[n]$ of Figure 3(c).

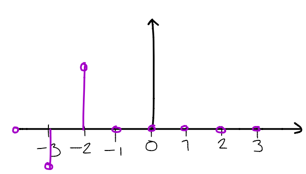
(d) Repeat (a) for the signal $x_d[n]$ of Figure 3(d).



(c)

$x_a[-n] \cdot u[-2-n] = x_a[n] \cdot u[-(n+2)]$

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x_c[n]$	0	0	0	0	0	-2	4	-2	2	-1	0	0	0
$x_c[-n]$	0	0	0	-1	2	-2	4	-2	0	0	0	0	0
$u[-2-n]$	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_c[-n]u[-2-n]$	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0



vi) $x_c[n](\delta[n+1] + \delta[n-1]) = y[n] = x_c[n]\delta[n+1] + x_c[n]\delta[n-1] = x_c[-1]\delta[n+1] + x_c[1]\delta[n-1]$
$= -2\delta[n+1] - 2\delta[n-1] = -2(\delta[n+1] + \delta[n-1])$

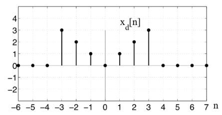
2.11[26] Consider the signals shown in Figure 3.

(a) Write an expression for $x_a[n]$. The expression will involve the sum of discrete impulse functions.

(b) Write an expression for $x_b[n]$.

(c) Write an expression for $x_c[n]$.

(d) Write an expression for $x_d[n]$.



(d)

$n_0=-3$ $\quad n=0 \quad$ $n_0=3$

$$x_d[n] = \{\dots,0,0,3,2,1,0,1,2,3,0,0,\dots\} =$$
$$3\cdot\delta[n+3]+2\delta[n+2]+1\cdot\delta[n+1]+0+1\cdot\delta[n-1]+2\delta[n-2]+3\delta[n-3]$$

1.11[11] Express the following in terms of $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0),\ f(t) \text{ continuos at } t=t_0$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\Big(\delta(\tau-2)+\delta(\tau+2)\Big)d\tau\ .$$

$$y(t) = \tfrac{1}{2}\int[x(\tau)\delta(\tau-2)+x(\tau)\delta(\tau+2)]\delta\tau = \tfrac{1}{2}\Big[\underbrace{\int x(\tau)\delta(\tau-2)\,d\tau}_{t_0=2}+\underbrace{\int x(\tau)\delta(\tau+2)\,d\tau}_{t_0=-2} =$$
$$\tfrac{1}{2}[x(2)+x(-2)]$$

1.12[12]

(a) Prove the time-scaling relation from Table 2.3 in PPR. (*Hint*: use a change of variables):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt\ .$$

(b) Prove the following relation from Table 2.3 in PPR:

$$u(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)d\tau\ .$$

(c) Evaluate the following integrals:

(i)	$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(2t)\delta(t)dt$	**(iv)**	$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-1)\delta(t-2)dt$
(ii)	$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(2t)\delta(t-\frac{\pi}{4})dt$	**(v)**	$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-1)\delta(2t-4)dt$
(iii)	$\int_{-\infty}^{\infty}\cos[2(t-\frac{\pi}{4})]\delta(t-\frac{\pi}{4})dt$		

(iii)

$$x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\delta(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{\cos[2(\underbrace{t-\tfrac{\pi}{4}}_{t'})]}^{x(t')}\overbrace{\delta(\underbrace{t-\tfrac{\pi}{4}}_{t'=0=t-\frac{\pi}{4}|_{t=\frac{\pi}{4}}})}^{\delta(t')}dt = \int_{-\infty}^{\infty}x(0)\delta(t')dt' -$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\Big(2\big(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4}\big)\Big)\cdot\delta(t-\tfrac{\pi}{4})dt = \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\cos(0)}_{=1}\cdot\delta(t-\tfrac{\pi}{4})dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$$

(v)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-1)\delta(2t-4)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\sin(2-1)\delta(2t-4)dt = \sin(1)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(2t-4)dt = \left|\begin{matrix}2t=u \Rightarrow t=\frac{u}{2}\\ dt=\frac{du}{2}\end{matrix}\right| =$$

$2t-4=0 \Rightarrow 2=t$

$$\sin(1)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-4)\frac{du}{2} = \frac{\sin(1)}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(u-4)\,du}_{=1} = \frac{\sin(1)}{2}$$

1.14[14] Determine whether each system is

(i)	memoryless	**(iv)**	stable
(ii)	invertible	**(v)**	time invariant
(iii)	causal	**(vi)**	linear

The systems are described as

(a)	$y(t) = \cos(x(t-1))$	**(e)**	$y(t) = 7x(t)+6$
(b)	$y(t) = 3x(3t+3)$	**(f)**	$y(t) = \int_{-\infty}^{t}x(5\tau)d\tau$
(c)	$y(t) = \ln(x(t))$	**(g)**	$y(t) = e^{-j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$
(d)	$y(t) = e^{tx(t)}$	**(h)**	$y(t) = \int_{t-1}^{t}x(\tau)d\tau$

Memory less: ✓ $\quad y(t)$ depends only on input $x(t)$

Invertible: $y(t) = 7x(t)+6 \Rightarrow x(t) = \frac{y(t)-6}{7}$ ✓

Causal: ✓ $\quad y(t)$ depends only post and/or current input.

Stable: Def: $\exists M,N<\infty: |x(t)|\leqslant M, |y(t)|\leqslant N, \forall t \Rightarrow$ BIBO $\quad |x(t)|\leqslant M \Rightarrow |y(t)|\leqslant 7\cdot M+6<\infty$ ✓

Time invariant: $y(t)|_{t-t_0} = y(t)|_{x(t-t_0)}$ $\quad y(t)|_{t-t_0} = 7x(t-t_0)+6$ $\quad y(t)|_{x(t-t_0)} = 7x(t-t_0)+6$ ✓

Linnear: Additivety

$x_1(t)+x_2(t) \Rightarrow y_1(t)+y_2(t)$

Homogenity $\qquad$ Test: $a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \Rightarrow a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$

$a\cdot x(t) \Rightarrow a\,y(t)$

Additivety test

$y_1(t)+y_2(t) = 7x_1(t)+6+7x_2(t)+6 = 7(x_1(t)+x_2(t))+12$

Should be the same as: $y(t)|_{x(t)=x_1(t)+x_2(t)} = 7(x_1(t)+x_2(t))+6$ ✗

4.2[42] Show that, for any function $g[n]$, Convolution: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$$g[n] \star \delta[n] = g[n] \; .$$

$g[n] * \delta[n] = g[n]$

$$y[n] = g[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\underbrace{\delta[n-k]}_{=1 \text{ iff } n=k} = g[k]\Big|_{k=n} = g[n]$$

QED

Rep Fouriertransformer

LTI-System

$y(t) = (h * x)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$

Systemet är stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$

Kausalitet $\Leftrightarrow h(t) = 0$ för alla $t < 0$

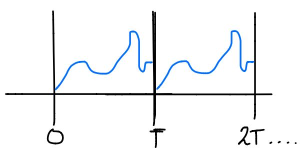
Fouriertransformen

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,d\tau < \infty$ definieras $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$, ω reellt

X är alltid en kontinuerlig funktion. Om x är kontinuerlig bestäms x entydigt av X.
Om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$ och $y(t) = (h * x)(t)$ gäller $\int_{-\infty}^{\infty} |y(\tau)|\,d\tau < \infty$
och $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

Fourierserier

Tar hand om signaler som är periodiska.
$x : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ är T-periodisk om $x(t+T) = x(t)$ för alla t.



x är entydigt bestämt mellan $0 \leq t \leq T$.

För alla n

T-periodisk x: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} |x(\tau)|\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{T} |x(\tau)|\,d\tau = \infty \int_0^T |x(\tau)|\,d\tau \Rightarrow$

Integralen är bara ändlig om $\int_0^T |x(\tau)|\,d\tau = 0 \Rightarrow x(\tau) = 0$ för "nästan alla τ".

Vi kan alltså INTE fouriertransformera T-periodiska signaler.

Givet en T-periodisk signal x, s.a. $\int_0^T |x(\tau)|\,d\tau < \infty$ så definieras för heltal k, dess k:te fourierkoefficient: $C_k (= a_k) = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)e^{-\frac{2\pi jk\tau}{T}}\,d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)e^{-j\omega_k\tau}\,d\tau$

$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$

Om x är kontinuerlig bestäms x entydigt av $\ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$
Om x är två ggr deriverbar kan vi återskapa x i en punkt t: $x(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} a_k \cdot e^{j\omega_k t}$
för alla t.

Hur bildar vi periodiska signaler?

$\tilde{x}(-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,d\tau < \infty$

Definiera $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-nT)$ ← Periodicering av $\tilde{x}$.

Oväsentlig

Obs! $x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t+T-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-(n-\cancel{1})T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-nT) = x(t)$

för alla $k, n \in \mathbb{Z}$

$C_k = C_k(\tilde{x}) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{x}(t-nT)e^{-j\omega_k t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{x}(t)e^{-j\omega_k(t+nT)}\,dt = \{e^{-j\omega_k nT} = e^{-j\cdot\frac{2\pi k}{\cancel{T}}\cdot n\cancel{T}} = 1\} =$
$\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)e^{-j\omega_k t}\,dt = \frac{1}{T}\tilde{X}(j\omega_k)$

LTI-System $y(t)=(h*x)(t)$, antag att $\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau<\infty \Leftrightarrow$ (Stabilt)

Om x begränsad T-per signal är även y begränsad (stabilitet) och T-periodisk (tidsinvarians).
Det gäller även att $C_k(y)=H(j\omega_k)C_k(x)$ $\left(\omega_k=\frac{2\pi k}{T}\right)$

Analogt med $Y=H\cdot X$

Ex $x(t)=\cos(2t)+3\sin(t)$

Bestäm fourierkoeff. – Perioden? $T=2\pi$ ($\cos(2t)$ är π, $\sin(t)$ är 2π)

Alt 1

$$C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T(\cos(2t)+3\sin(t))e^{-j\frac{2\pi k}{2\pi}t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos(2t)}_{\cos(2t)=\frac{1}{2}(e^{j2t}+e^{-j2t})}e^{-jkt}dt+\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t)e^{-jkt}dt=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}e^{2jt}\cdot e^{-jkt}+\ldots$$

$\omega_k=\frac{2\pi k}{T}=\frac{2\pi k}{2\pi}=k$

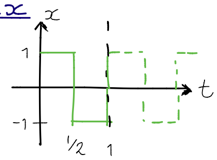
Alt 2

$$x(t)=\frac{1}{2}(e^{2jt}-e^{-2jt})+\frac{3}{2j}(e^{jt}-e^{-jt})=\frac{1}{2}e^{-2jt}-\frac{3}{2j}e^{-jt}+\frac{3}{2j}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{2jt}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{j\omega_k t}=$$

Fourierkoeff!

$$\ldots+C_{-3}(x)e^{-3jt}+C_{-2}e^{-2jt}+\ldots+C_2(x)e^{2jt}+C_3(x)e^{3jt}+\ldots \Rightarrow \begin{cases} C_{-2}(x)=\frac{1}{2} & C_1(x)=\frac{3}{2j} \\ C_{-1}(x)=\frac{-3}{2j} & C_2(x)=\frac{1}{2} \\ C_k(x)=0 & k\neq -2,-1,1,2 \end{cases}$$

Ex



$T=1$ $\quad x(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}\leq t<1\end{cases}$

$$C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt=\frac{1}{1}\int_0^1 x(t)e^{-j2\pi kt}dt=\int_0^{1/2}\overset{=1}{x(t)}e^{-j2\pi kt}dt+\int_{1/2}^1\overset{=-1}{x(t)}e^{-j2\pi kt}dt=\int_0^{1/2}e^{-2\pi jkt}dt+\int_{1/2}^1-e^{-2\pi jkt}dt=$$
$$\left[\frac{-e^{-j2\pi kt}}{2\pi jk}\right]_{t=0}^{1/2}-\left[\frac{-e^{j2\pi kt}}{2\pi jk}\right]_{t=1/2}^{1}$$

$$\underset{k\neq 0}{C_k(x)}=\frac{1}{2\pi jk}(e^{-\pi jk}-(-1))-\frac{1}{2\pi jk}(-1+e^{-\pi jk})=\frac{2}{2\pi jk}(1-e^{-\pi jk})=\frac{1-e^{\pi jk}}{\pi jk}=\{e^{-\pi jk}=(-1)^k\}=\frac{1-(-1)^k}{\pi jk}=\begin{cases}0 & k\in\mathbb{Z}_+ \\ \frac{2}{\pi jk} & k\in\mathbb{Z}_-\end{cases}$$

$C_0(x)=\int_0^1 x(t)dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

Sågs i grafen.

Rep

LTI-System $y(t)=(h*x)(t)$

Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$
Kausalt $\Leftrightarrow h(t)=0 \quad t<0$

Om $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$ definierar vi $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$, ω reell

Frekvenssvar

Huvudsamband: $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)$

Om x T-periodisk ($x(t+T)=x(t)$ för alla t)
så är y T-periodisk och $C_k(y)=H(\omega_k)C_k(x)$ där $\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$ och $C_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt$, $k\in\mathbb{Z}$

Medelenergi
Medelenergi för $x=E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$ om x ej är periodisk
Medelenergi för en T-periodisk signal $x=E_T(x)=\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2dt$

Plancherels formel
$E(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$ $\qquad x$ ej periodisk

Parsevals Formel
$E_T(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k(x)|^2$

Ex 2015-04-14

Givet
LTI-System $y(t)=(h*x)(t)$
$H(j\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\leq 1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$

Låt $x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}e^{jkt}$

Sökt
a) Är y 2π-periodisk
b) Bestäm $C_k(x)$
c) Bestäm $E_T(x)$
d) Bestäm y

Lösning

a)
Systemet är tidsinvariant $\Rightarrow$ Om $x_{t_0}(t)=x(t-t_0) \Rightarrow (h*x_{t_0})(t)=y_{t_0}(t)$

Tag $t_0=T \overset{2\pi}{=}$, då gäller att $x_{t_0}(t)=x(t) \Rightarrow y_{t_0}(t)=y(t-2\pi)=h*x_{t_0}(t)=h*x(t)=y(t)$ för alla t

$T=2\pi$ eftersom e^{jkt} är 2π-periodisk. $e^{jk(t-2\pi)}=e^{jkt}\cdot e^{jk2\pi}=e^{jkt}\cdot 1$

b)
$x(t)$ är 2π-periodisk $\Rightarrow x=\sum_{-\infty}^{\infty}C_k(x)e^{jkt}$

$\begin{cases}C_k(x)=\frac{1}{2^k}, & k\geq 0 \text{ (Titta på ursprungliga signalen)}\\ C_k(x)=0, & k<0 \quad \text{Det finns inga negativa } k \quad \text{Alt: } C_k(x)=\frac{1}{2^k}u(k)\end{cases}$

c)

$$E_T(x) = E_{2\pi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |x(t)|^2 dt = \{\text{Parsevals}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k(x)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \left\{\begin{matrix}\text{geometrisk}\\ \text{summa}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

d)

$y = h * x$ Vi vet att y är 2π-periodisk och bestäms entydigt av C_k

$C_k(y) = H(\omega_k)C_k(x) = H(k)C_k(x)$ k - heltal

OBS! $H(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \Rightarrow C_k(y) = \begin{cases} 0 & \text{om } k\neq 0 \\ C_0(x) = 1 & \text{om } k=0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k(y)e^{jkt} = 1$ för alla t.

Ex 2015-04-14, UPP3

Givet

LTI-system: $y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau} x(\tau)d\tau$

För ett tal $\alpha > 0$, sätt $x_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$

Sökt

a) Visa genom att använda att $x_\alpha(t) = e^{-\alpha t}u(t) + e^{+\alpha t}u(-t)$ att Fouriertransformen $X_\alpha(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

b) Om y_α är utsignal för $x = x_\alpha$, bestäm Y_α.

c) Bestäm alla $\alpha > 0$ s.a. $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_\alpha(j\omega)| d\omega = 4$

d) Definiera $z_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_\alpha(t+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t+n|}$
Bestäm $\{C_k(z_\alpha)\}$

e) Bestäm $\alpha > 0$ s.a. $C_1(z_\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

Lösning

a)

$x_\alpha(t) = \underbrace{e^{-\alpha t}u(t)}_{w(t)} + \underbrace{e^{\alpha t}u(t)}_{w(-t)}$ Vi behöver hitta $W(j\omega) \overset{\text{Formelsamling}}{=} \frac{1}{\alpha + j\omega}$ (Fouriertransform av $e^{-\alpha t}u(t)$)

$X_\alpha(j\omega) = W(j\omega) + W(-j\omega)$

$X_\alpha(j\omega) = \frac{1}{\alpha+j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} = \left\{\begin{matrix}\text{konjugat-}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

b)

$y(t) = (h * x)(t)$

$h(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(t)}{t}$ $H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega|\leq 1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$ FS! $\Rightarrow Y_\alpha(j\omega) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} & |\omega|\leq 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$

$Y_\alpha(j\omega) = H(j\omega)X_\alpha(j\omega)$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_\alpha(j\omega)| d\omega = \int_{-1}^{1} \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} d\omega = \left\{ \int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x) \right\} = \frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1} \frac{d\omega}{1+(\frac{\omega}{\alpha})^2} = 2\tan^{-1}(\frac{\omega}{\alpha})\ldots\ldots$

d) z_α 1-periodiseringen av $x_\alpha \sim C_k(z_\alpha) = \frac{1}{T}X_\alpha(j\omega_k) = X_\alpha(j2\pi k) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2k^2}$ $T=1$ $\omega_k = \frac{2\pi k}{1}$ Behöver man lära sig känna igen!

e) $C_1(z_\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2 + 4\pi^2 \Rightarrow \alpha^2 = 4\pi^2 \Rightarrow \alpha = 2\pi > 0$

Ex Uppg 1d

$y(t) = (h_i * x)(t)$ där $h_1(t) = \frac{1}{1+|t|}u(1-|t|)$
$h_2(t) = \frac{1}{1+|t|}u(|t|-1)$

Sökt

Stabila?

Lösning

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)|dt = \{h_1(t) = 0, |t|>1\} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+|t|}dt \leq \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2 < \infty$ Stabilt

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_2(t)|dt = \{h_2(t) = 0, |t|<1\} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+|t|}dt + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+|t|}dt = 2\int_{1}^{\infty} \frac{1}{1+t}dt = 2[\ln(1+t)]_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(1) = +\infty$ Ej Stabilt

Rep

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$, ω reellt

1) $x(t) = e^{\alpha t} u(t)$, $\alpha > 0 \leftrightarrow X(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$
2) $y(t) = (h * x)(t) \leftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$
3) $x(t) = z(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega) = e^{-j\omega t_0} Z(j\omega)$
4) $x(t) = z(-t) \leftrightarrow X(j\omega) = Z(-j\omega)$
5) $x(t) = t\, z(t) \leftrightarrow X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega}(Z(j\omega))$
6) $x(t) = t^2 z(t) \leftrightarrow X(j\omega) = -1\, Z''(j\omega)$
7) $x(t) = \frac{\sin t}{\pi t} \leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$
8) $z(t) = x(t) y(t) \leftrightarrow Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * Y)(j\omega)$

Ex $x(t) = e^{5t} u(1-t)$, bestäm X.

$x(t) = z(-t)$,

$z(t) = e^{-5t} u(t+1) = e^{-5(t+1-1)} u(t+1) = e^5 \cdot e^{-5(t+1)} u(t+1) = e^5 \cdot w(t+1)$, där $w(t) = e^{-5t} u(t)$

4) $X(j\omega) = Z(-j\omega)$
3) $Z(j\omega) \underset{t_0 = -1}{=} e^5 \cdot e^{-j\omega(-1)} \cdot W(j\omega)$
1) $W(j\omega) = \frac{1}{5 + j\omega}$

$Z(j\omega) = e^5 \cdot e^{j\omega} \cdot \frac{1}{5 + j\omega}$

$\underline{X(j\omega) = e^5 \cdot \frac{e^{-j\omega}}{5 - j\omega}}$

Här blev klockan leet.

Alt: $x(t) = e^{5t} u(-(-t-1)) = e^{5(t-1)} \cdot e^5 \cdot u(-(t-1)) = e^5 \cdot z(t-1)$, där $z(t) = e^{5t} u(-t) = w(-t)$

där $w(t) = e^{-5t} u(t)$

3) $X(j\omega) = e^5 \cdot e^{-j\omega} Z(j\omega)$
4) $Z(j\omega) = W(-j\omega)$
1) $W(j\omega) = \frac{1}{5 + j\omega}$

$Z(j\omega) = \frac{1}{5 - j\omega}$

$\underline{X(j\omega) = e^5 \cdot \frac{e^{-j\omega}}{5 - j\omega}}$

Ex $x(t) = t^2 e^{-t} u(t-2)$, Bestäm X!

5) på sig själv!

$x(t) = t^2 z(t)$, $z(t) = e^{-t} u(t-2)$

$x(t) = t w(t)$, $w(t) = t\, z(t) \Rightarrow W(j\omega) = j \frac{d}{d\omega}(Z(j\omega))$

$X(j\omega) = j \frac{d}{d\omega}(W(j\omega))$

$\Rightarrow \{ \overbrace{x(t) = t^2 z(t) \leftrightarrow X(j\omega) = -1\, Z''(j\omega)}^{6} \}$

$z(t) = e^{-(t-2+2)} u(t-2) = e^{-2} \underbrace{e^{-(t-2)} u(t-2)}_{s(t-2)}$ där $s(t) = e^{-t} u(t)$

5&2 $X(j\omega) = -Z''(j\omega)$
3 $Z(j\omega) = e^{-2} e^{-2j\omega} S(j\omega)$
1 $S(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$

$Z(j\omega) = e^{-2} \frac{e^{-2j\omega}}{1 + j\omega}$

$Z' = e^{-2} \left(\frac{-2j \cdot e^{-2j\omega}(1 + j\omega) - e^{-2j\omega} j}{(1 + j\omega)^2} \right)$

$Z'' = \ldots$

Ex Tenta 2015-08-27, upp 3

Givet

LTI-system $y(t) = (h * x)(t)$

$h(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2$

Sökt

a) Stabilt / Kausalt
b) H
c) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t+n)} u(t+n)$ - Bestäm $C_k(x)$
d) Visa att om x från c) är insignal $\Rightarrow$ y är 1-periodisk.
Bestäm även $C_k(y)$.

Lösning

a)

Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

Jämn funktion

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{\pi^2 t^2} dt = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{t^2} dt + \frac{2}{\pi^2} \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt}_{\leq \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty} = 1 < \infty} =$

Då $\sin^2 t \leq 1$

Viktigt!

$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \infty & \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$

$\underline{h \text{ är stabil}}$

Kausalt $\Leftrightarrow$ $h(t)=0,\ t<0$

I vårt fall $h(-t)=h(t)$ Jämna signaler !kausala

om $h(t)=0,\ t<0 \Rightarrow h(t)=0,\ t>0 \Rightarrow$

$h(t)=0$ för alla $t\neq 0$.

Men $\frac{\sin^2 t}{t^2}\neq 0$ för alla $t\neq 0 \Rightarrow$ Systemet !kausalt

b) 7 & 8

I vårt fall $h(t)=Z(t)^2=z(t)z(t)$ där $z(t)=\frac{\sin t}{t}$ $\Rightarrow \begin{cases} H(j\omega)=\frac{1}{2\pi}(Z*Z)(j\omega) \\ Z(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leq 1\\ 0, & |\omega| > 1\end{cases}\end{cases}$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Z(j(\omega-\eta))Z(j\eta)\,d\eta=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} Z(j(\omega-\eta))\,d\eta$$

$$=\left\{Z(j(\omega-\eta))\right\}=\left\{\begin{matrix}1 & |\omega-\eta|\leq 1\\ 0 & |\omega-\eta|>1\end{matrix},\ -1\leq\eta\leq 1\right\}=\frac{1}{2\pi}(2-|\omega|)u(2-|\omega|)=H(j\omega)$$

magi...

c) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t+n)$, $z(t)=e^{-t}u(t)$

T=1-periodisk

Mer allmänt: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t+nT)$ T-periodisk

$C_k(x)=\frac{1}{T}Z(\omega_k)$, $\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$

$C_k(x)=\frac{1}{1}Z(\omega_k)$, $\omega_k=\frac{2\pi k}{1}=2\pi k$

I vårt fall: $Z(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$ 1) $\Rightarrow C_k(x)=\frac{1}{1+j2\pi k}$

d) LTI $\Rightarrow$ y 1-per, bevis i föregående

$$C_k(y)=H(j\omega_k)C_k(x)=\underbrace{H(j2\pi k)}C_k(x)$$

$H(j\omega)=0$ om $|\omega|>2$

$|2\pi k|\leq 2 \Leftrightarrow \pi|k|\leq 1 \Leftrightarrow k=0$

$$C_k(y)=\begin{cases}0 & k\neq 0\\ \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{H(0)}\cdot \underbrace{1}_{C_0(x)} & k=0\end{cases}$$

Detta betyder: $y(t)=\frac{1}{\pi}$, alla t

$$H(j\omega)=\frac{1}{2\pi}(2-|\omega|)\underbrace{u(2-|\omega|)}$$

$=0$ om $2-|\omega|<0 \Leftrightarrow |\omega|>2$

Recap Fourier

ω_0 = fundamental frequency $= \frac{2\pi}{T_0}$ $\quad T_0$ = fundamental period

$x(t)$ is a reel periodic signal, then $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t}$ $\quad C_k = \overline{C_{-k}} = C_{-k}^*$

$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j\omega_0 k t} dt$ p160

Periodic signal

$x(t) = x(t+T) = x(t+nT)$

To find a signals common period: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $\quad T = m_1 T_1 = m_2 T_2$ integer

Period of x_1 $\quad$ Period of x_2

Orthogonality

$g(t), h(t)$ are orthagonal over interval (a,b) if $\int_a^b g(t)h(t) = 0$

$\text{Sinc}(\omega t) := \frac{\text{sinc}(\omega t)}{\omega t}$ $\quad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2i}$ $\quad \cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

5.1 a

5.1[57] Consider the Fourier series for the periodic functions given.

(i) $x(t) = \sin(4t) + \cos(8t) + 7 + \cos(16t)$
(ii) $x(t) = \cos^2(t)$
(iii) $x(t) = \cos(t) + \sin(2t) + \cos(3t - \pi/3)$
(iv) $x(t) = 2\sin^2(2t) + \cos(4t)$
(v) $x(t) = \cos(7t)$
(vi) $x(t) = 4\cos(t)\sin(4t)$

a) Find the Fourier coefficients of the exponential form for each signal.

b) Find the Fourier coefficients of the combined trigonometric form for each signal.

Does not depend on t

i) Can be written as: $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$ $\quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $\quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \times$

$\omega_1 = 4 \quad \omega_2 = 8 \quad \omega_3 = 0 \quad \omega_4 = 16$ $\quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{\pi}{4}$ $\quad T_4 = \frac{2\pi}{\omega_4} = \frac{\pi}{8}$

Common Period $T_0 = m_1 T_1 = m_2 T_2 = m_4 T_4$ $\quad m_1, m_2, m_4 \in \mathbb{N}$

$m_1 = 1 \Rightarrow T_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ We were able to find integers that works => periodic signals

$m_2 = 2$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4 \ \frac{\text{rad}}{s}$

$m_4 = 4$

$$i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t} = \frac{1}{2j}\left(\overset{k=1}{e^{j\omega_0 t}} - \overset{k=-1}{e^{-j\omega_0 t}}\right) + \frac{1}{2}\left(\overset{k=2}{e^{j2\omega_0 t}} + \overset{k=-2}{e^{-j2\omega_0 t}}\right) + \overset{k=0}{7} + \frac{1}{2}\left(\overset{k=4}{e^{j4\omega_0 t}} + \overset{k=-4}{e^{-j4\omega_0 t}}\right) =$$

k	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4
C_k	7	$\frac{1}{2j}$							

$$k=1 \Rightarrow C_1 e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2j}$$

Handledarn bah: Jag vet inte om jag gjort rätt... återkommer nästa vecka.

iv) $x(t) = 2\sin^2(2t) + \cos(4t)$

$\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t) \Rightarrow 2\sin^2(t) = 1 - \cos(2t) \Rightarrow x(t) = 1 - \cos(4t) + \cos(4t) = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_0 k t}$

for $k=0 \rightarrow C_0 = 1$

all other k: $C_k = 0$

5.2 a)

5.2[58]

(a) Determine whether the following functions can be represented by a Fourier series

- **(i)** $x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$
- **(ii)** $x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + e^{j2t}$
- **(iii)** $x(t) = \cos(t) + \sin(\pi t)$
- **(iv)** $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ where
  $x_1(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ and $x_2(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{9}\right)$

(b) For those signals in part (a) that can be represented by a Fourier series, find the coefficients of all harmonics, expressed in exponential form.

$$x(t) = \cos(6t) + \sin(8t) + e^{j2t}$$

Is the signal periodic?

Signal	$\cos(6t)$	$\sin(8t)$	e^{j2t}
Freq	$\omega_1 = 6$	$\omega_2 = 8$	2
Period	$T_1 = \frac{\pi}{3}$	$T_2 = \frac{\pi}{4}$	$T_3 = \pi$

$$T_0 = \underset{\uparrow 3}{m_1}\frac{\pi}{3} = \underset{\uparrow 4}{m_2}\frac{\pi}{4} = \underset{\uparrow 1}{m_3}\pi = \pi$$

Periodic signal

Gick i pausen.

Fourierpresentation

Tre former: $x(t) = x(t+T)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$
$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta)$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Signalens medelvärde: $a_0 = A_0 = C_0$

Periodiska signaler

Inte säker!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad C_k = \int_T x(t) e^{-j\omega_0 kt}$$

Icke-periodiska $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad , \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

CTFS-Egenskaper

$x(t) \longleftrightarrow C_k \qquad y(t) \longleftrightarrow d_k$

$x(t) + y(t) \longleftrightarrow C_k + d_k$

$Ax(t) + By(t) \leftrightarrow AC_k + Bd_k$

$x(\alpha t) \leftrightarrow C_k$ (fund. frekv. $= \alpha\omega_0$)

$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0} C_k$

$x(-t) \longleftrightarrow C_{-k}$

$\frac{d}{dx} x(t) \leftrightarrow jk\omega_0 C_k$

CTFT-Egenskaper

$x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \leftrightarrow y(t) = Y(j\omega)$

$x(t) + y(t) \leftrightarrow X(j\omega) + Y(j\omega)$

$Ax(t) + By(t) \longleftrightarrow AX(j\omega) + BY(j\omega)$

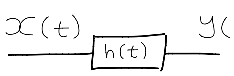
$x(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)$

$x(-t) \leftrightarrow X(-j\omega)$

$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

med flera

Kontinuerligt LTI-System



Fouriertransformera

$$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$$

Om insignalen är periodisk: teckna som fourierserie.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

Och därefter dess fouriertransform

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(\omega - k_0)$$

Fourierseriekoefficienten

Utsignal $\quad Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{H(j\omega) C_k}}_{H(jk\omega_0) C_k} \delta(\omega - k_0)$

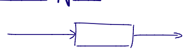
Fourierseriekoeff. till $y(t)$

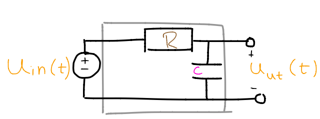
Fourierserien blir: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k H(j\omega_0 k) e^{jk\omega_0 t}$

Varje frekvenskomponent i signalen (med frekvens $k\omega_0$) påverkas av systemet med $H(j\omega_0 k)$

$H(j\omega)$ är systemets frekvenssvar.

Exempel





$$\begin{cases} U_{in}(t) = i \cdot R + U_{ut}(t) \\ i = C \cdot \frac{dU_{ut}}{dt} \end{cases} \Rightarrow RC \frac{dU_{ut}}{dt} + U_{ut}(t) = U_{in}(t)$$

Fouriertransform: $RCj\omega U_{ut}(j\omega) + U_{ut}(j\omega) = U_{in}(j\omega)$

$$U_{ut}(j\omega)(1 + RC) = U_{in}(j\omega$$

$$\frac{U_{ut}(j\omega)}{U_{in}(j\omega)} = H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Amplitudpåverkan: $|H(j\omega)| = \frac{1}{(1 + (\omega RC)^2)^{1/2}}$

Fasbidrag: $\arg\{H(j\omega)\} = -\arctan(\omega RC)$

Faltning med impuls

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau = x(t-t_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0-\tau)\,d\tau}_{=1} = x(t-t_0)$$

Multiplikation i tidsdomän

Låt $x(t)$ vara periodisk med fourierserie $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\omega_k t}$ [med motsvarande fouriertransform] $X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\,\delta(\omega-\omega_k)$

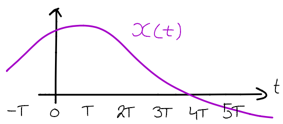
$g(t)$ en icke periodisk signal $g(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} G(j\omega)$ $\qquad \omega_k = k\omega_0$

Egenskap: $y(t)=g(t)x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega)=\frac{1}{2\pi}G(j\omega)*X(j\omega)$

$$Y(j\omega)=\frac{2\pi}{2\pi}G(j\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,\delta(\omega-\omega_k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,G(j(\omega-\omega_k))$$

Sampling

En diskret signal skapas utifrån en kontinuerlig signal.



$g[n]=x(nT)$, en diskret representation av $x(t)$. Värden hos $x(t)$ läses av vid diskreta tidpunkter $t=nT$, $n\in\mathbb{Z}$

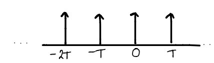
Kan vi återskapa $x(t)$ utifrån $g[n]$?

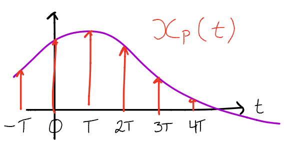
Modell för sampling (genomgående kontinuerliga signaler)

$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_p(t)=x(t)p(t)$

$\uparrow$

$p(t)$ $\qquad p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ "Ett impulståg"





$x(t)$ är kontinuerlig, $x_p(t)=x(t)p(t)$ är också kontinuerlig.

Vi vet att $x(t)\delta(t-nT)=\underbrace{x(nT)}_{\text{samplevärde}}\delta(t-nT)$. Vi får $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$

Multiplikation i tidsdomänen $x(t)p(t)$ ger faltning i frekvensdomänen.

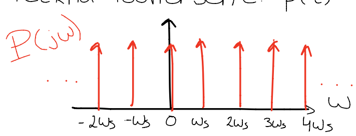
$X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*P(j\omega)$, $\quad x(t)\overset{FT}{\longleftrightarrow}X(j\omega)$

$p(t)\overset{FT}{\longleftrightarrow}P(j\omega)$

Impulståget $p(t)$ är periodisk med perioden T. Beräkna dess fourierseriekoeff. $C_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt=\frac{1}{T}$ $\qquad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$

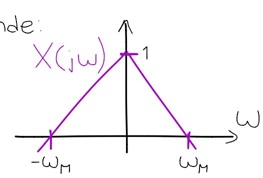
$C_k=\frac{1}{T}$ för alla k

Teckna fourierserie: $p(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_s t}$ och därefter motsvarande fouriertransform: $P(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)$

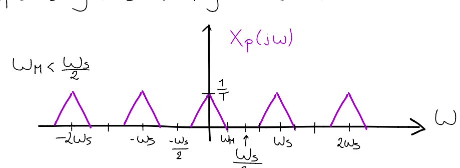


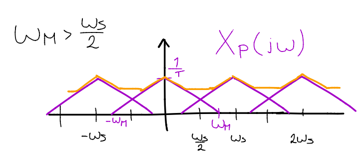
$P(j\omega)$ är också ~~ett~~ impulståg ~~fast~~ längs ω-axeln.

Låt $X(j\omega)$ ha följande utseende:



För att erhålla $X_p(j\omega)$ faltas $X(j\omega)$ med alla impulser i $P(j\omega)$.





OBS!

$x(t)$ kan återskapas från $x_p(t)$ gm lågpassfiltrering och multiplikation med T
dock måste $\omega_M = \frac{\omega_s}{2}$, ω_s: Samplingsvinkelfrekvens,
T: Samplingsinterval
ω_M: Högsta frekvensinnehållet i signalen $x(t)$.

Samplingsteoremet

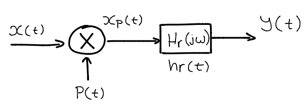
Låt en kontinuerlig signal $x(t)$ vara bandbegränsad. $x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = 0$ för $|\omega| > \omega_M$

Om samplingsvinkelfrekvensen $\omega_s > 2\omega_M$ kan signalen $x(t)$ återskapas från dess samplevärden. $x(nT_s)$; $n \in \mathbb{Z}$ där $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$

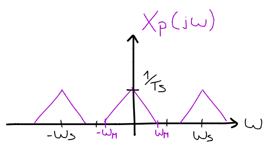
Några praktiska aspekter

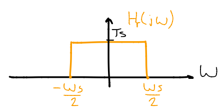
Om $x(t)$ ej är bandbegränsad används ett antivikningsfilter (anti aliasing). Ett kontinuerligt lågpassfilter som reducerar bandbredden hos signalen $x(t)$. Detta filter appliceras FÖRE sampling och minskar effekten av vikning/aliasing. Filtret undertrycker frekv.komponenter $> \frac{\omega_s}{2}$.

Ideal rekonstruktion

Modell 

$$x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$
$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \overset{FT}{\longleftrightarrow} P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega k)$$
$$x_p(t) = x(t)P(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j(k - k\omega_s))$$





Applicera ett idealt rekonstruktionsfilter $H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

Vi får $Y(j\omega) = H_r(j\omega) X_p(j\omega)$

Vi ser att vi får $Y(j\omega) = X(j\omega)$ alltså blir även $y(t) = x(t)$ och

Vi får åter den ursprungliga signalen.

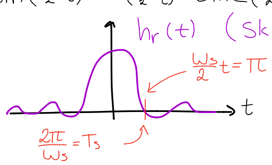
I tidsdomänen

Låt rekonstruktionssystemets impulssvar vara $h_r(t) = FT^{-1}\{H_r(j\omega)\}$.

$$y(t) = h_r(t) * x_p(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \{x[n] = x(nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_r(t - nT_s)$$

Räkna fram impulssvaret

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_s}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_s}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} = \frac{T_s}{\pi t} \cdot \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\omega_s}{2}t} - e^{-j\frac{\omega_s}{2}t}\right] = \frac{T_s}{2\pi} \sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) = \left\{T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}\right\} =$$
$$\frac{2\pi}{\omega_s \pi t} \sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)} = \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

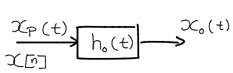


Notera!

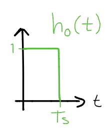
Impulssvaret $h_r(t)$ är icke kausalt samt har oändlig utsträckning. Ej praktiskt användbart.

Praktisk rekonstruktion

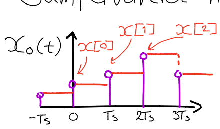
- Hållkrets av nollte ordningen



Låt impulssvaret $h_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{other} \end{cases}$



Sampelvärdet hålls kvar på sin nivå tills nästa samplevärde kommer.



$$x_0(t) = h_0(t) * x_p(t) = \{x[n] = x(nT_s)\} = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_0(t - nT_s)$$

Fouriertransformera: $X_0(j\omega) = H_0(j\omega) X_p(j\omega)$

$h_0(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} H_0(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(t) e^{-j\omega t} dt = 2 e^{(j\frac{T_s}{2}\omega)} \cdot \frac{\sin(\frac{\omega}{2}T_s)}{\omega}$

Första nollstället: $\frac{\omega T_s}{2} = \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T_s} = \omega_s$

Sammanfattning

LTI-System $y = h * x$

- Stabilt $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < +\infty$
- Kausalitet $\Leftrightarrow h(t) = 0, \ t < 0$

Om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ definierar vi $\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, & \omega \text{ reellt tal} \\ H(j\omega) = \dots \end{cases}$

och $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$

Exponentiellt Begränsad Signal

Anta: $x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$

x sägs vara exponentiellt begränsad om det existerar b så $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ för alla t, för något $M < \infty$

Ex

$x(t) = e^{2t}$ ← b=2 begränsad ty $|e^{2t}| \cdot e^{-2t} = e^{2t-2t} = e^{0} = 1 = M$

$x(t) = e^{t^2}$ ej begränsad

OBS!

Om $|x(t)| e^{-bt} \leq M$ så existerar $\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt}$ där $s \in \mathbb{C}$, för alla $Re(s) > b$

$|e^{-tRe(s)} \cdot e^{-tj\,Im(s)}| = e^{-tRe(s)} \cdot |e^{-tj\,Im(s)}| = e^{-tRe(s)} \cdot 1$ ← triggettan för alla t, s

Bevis Antag: $x(t) = 0$, $t < 0$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \cdot |e^{-st}| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)| e^{-bt}}_{M \text{ för alla } t} \cdot \underbrace{e^{-(s-b)|t|} dt}_{\int e^{-(Re(s)-b)t} dt \leq \infty \text{ om } Re(s) > b}$$

Def

Om $|x(t) e^{-bt}| \leq M$ för alla t definieras Laplacetransformen $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ om $Re(s) > b$

Om $s = j\omega$ så återfås Fouriertransformen av x om $b < 0$

Antag att $|x(t)| \leq e^{bt} M$, $x(t) = 0$, $t < 0$

Tag $s = a + j\omega$, $Re(a) > b$.

Inför $x_a(t) = e^{-at} \cdot x(t)$ ← Exponentiell dämpning!

Då gäller att $\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)| dt < \infty \rightsquigarrow X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s)$

Egenskaper

- Om $y = h * x$ och h, x är exp begr samt y existerar $\Rightarrow Y(s) = H(s) X(s)$
- $H(s)$ kallas överföringsfunktionen.
- β innehåller alla formler vi behöver.

Laplacetransform

Ensidig: $X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ om $x(t) = 0$ för $t < 0$.

Dubbelsidig: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$

Egenskap ensidig

Om $z(t) = x'(t)$, $x(t) = 0$ för $t < 0$, gäller $Z(s) = s \cdot X(s) - x(0)$ ← Begynnelsevärde

- $Z(s) = \int_{0}^{\infty} z(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{\infty} x'(t) e^{-st} dt = \begin{Bmatrix} \text{Partiell} \\ \text{integration} \end{Bmatrix} = [x(t) e^{-st}]_{0}^{\infty} - (-s) \int_{0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = 0 - x(0) + s \cdot X(s)$ ← för tillräckligt stora $Re(s)$.

Om $z(t) = x''(t) \rightsquigarrow Z(s) = s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)$

Ex $x''(t)-3x'(t)+2x(t)=e^{-t}u(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$

* Laplacetransformera VL & HL.

$VL = s^2X(s)-\cancel{sx(0)}-x'(0)-3(sX(s)-\cancel{x(0)})+2X(s) = (s^2-3s+2)X(s)-1$

$HL = \{\beta\} = \frac{1}{s+1}$

$VL = HL \Leftrightarrow (s^2-3s+2)X(s)-1 = \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{s+1}+1}{(s^2-3s+2)} = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2} \rightsquigarrow \beta$

$$x(t) = Ae^{-t}u(t)+Be^{t}u(t)+Ce^{2t}u(t)$$

Bestäm A, B, C! (Handpåläggning)

* Multiplicera med s+1. $A+(s+1)\left(\frac{B}{\dots}+\frac{C}{\dots}\right) = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}$
* Sätt $s=-1$ för att bli av med B och C. $\Rightarrow A+0 = \frac{1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$
* Multiplicera med s-1. $B+(s-1)\left(\frac{A}{\dots}+\frac{C}{\dots}\right) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)} \Rightarrow \{s=1\} \Rightarrow B = \frac{3}{2\cdot(-1)} = \frac{-3}{2}$
* Multiplicera med s-2. $\Rightarrow C = \frac{4}{3}$

$A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{-3}{2}$, $C=\frac{4}{3}$

Ex Omtenta elektro 2015-08-27 Uppg 2

Givet

$y = h*x$

$z = h*y$

$h(t) = e^{-t}u(t)$

Sökt

a) Överföringsfunktionen för systemet $x \mapsto z$

b) Är $x \mapsto z$ stabilt?

c) Om $x(t)=u(t)$ vad är z?

d) Om $z(t)=t^2e^{-t}$ vad var x?

Lösning

a) $z = h*y = h*(h*x) = (h*h)*x = h_2*x$ h_2 är impulssvaret för $x \mapsto z$.

$H_2(s) = H(s)H(s) = \left\{H(s) \overset{(\beta)}{=} \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

b) $\int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t)|dt < \infty$

$h_2(t) \overset{(\beta)}{=} te^{-t}u(t)$, $\int_{-\infty}^{\infty}|te^{-t}|dt \overset{(\beta)}{=} \dots < \infty \Rightarrow$ Stabilt!

c) (β) $X(s) = \frac{1}{s}$, $Re(s)>0$

$Z(s) = H_2(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{(s+1)^2} \Rightarrow z(t) = A\,u(t)+Be^{-t}u(t)+Cte^{-t}u(t)$

Räkna ut A, B och C.

d) $Z(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$

$Z(s) = H_2(s)X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{Z(s)}{H_2(s)} = \frac{\frac{2}{(s+1)^3}}{\frac{1}{(s+1)^2}} = \frac{2}{s+1} \overset{(\beta)}{\Rightarrow} x(t)\,2e^{-t}u(t)$

Laplacetransformen $\quad x:(-\infty,\infty)\longrightarrow \mathbb{C}$

$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad , \; s\in\mathbb{C}$

1) $x(t)=e^{at}u(t) \rightsquigarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-st}u(t)dt=\int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}dt=-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{s-a}$, $Re(s)>a$, a reella

2) $x(t)=e^{at}u(-t) \rightsquigarrow X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{at}e^{-st}u(t)dt=\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}dt=-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{s-a}$, $Re(s)<a$

$x \longleftrightarrow X(s)$, ROC (Region of Convergence)

$z(t)=x(t-t_0) \leftrightarrow Z(s)=e^{-st_0}X(s)$ Om $X(s)$ har ett visst ROC kommer $Z(s)$ ha samma ROC.
$z(t)=e^{s_0t}x(t) \longleftrightarrow Z(s)=X(s-s_0)$ Om $Re(s)>Re(s_0)+ROC(X)$
$z(t)=x'(t) \longleftrightarrow Z(s)=sX(s)$ samma ROC som $X(s)$ — Dubbelsidiga Laplace
$x''(t)\longleftrightarrow Z(s)=s^2X(s)$
$z(t)=x'(t) \longleftrightarrow Z(s)=s\cdot X(s)-x(0)$ — Enkelsidig Laplace
$x''(t)\longleftrightarrow Z(s)=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)$
$z=h*x \longleftrightarrow Z(s)=H(s)X(s)$ DUBBELSIDIG: Krävs även att $ROC(H)\cap ROC(x)\neq\emptyset$

När kör man vilken?

Om vi har ett LTI-system och vill lösa $y=h*x$ utan beg.villkor: Dubbelsidig
Om vi vill lösa ODE med konst. koefficienter, med beg. villkor: Enkelsidig

Ex Modelltentamen

Givet
LTI-system $y=h*x$
$y'(t)-2y(t)=x(t-1)$

Sökt
h

Lösning

$Y(s)=H(s)X(s) \Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

$y'(t)-2y(t)=x(t-1) \xrightarrow{LT} sY(s)-2Y(s)=e^{-s}X(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{e^{-s}}{s-2}=H(s)$

$H(s)=e^{-s}\cdot H_0(s)=e^{-s}\cdot\frac{1}{s-2}$, $H_0(s)=\frac{1}{s-2} \rightsquigarrow h(t)=e^{2t}u(t)$; $\rightsquigarrow h(t)=-e^{2t}u(-t)$ Vi vet inte vilken så vi tar båda.

i) $h(t)=h_0(t-1) \rightsquigarrow e^{2(t-1)}u(t-1)$; $\rightsquigarrow -e^{2(t-1)}u(-(t-1))=-e^{2(t-1)}u(1-t)$

Om vi antar att systemet är kausalt $\Rightarrow h(t)=e^{2(t-1)}u(t-1)$, $h(t)=0$, $t<0$
Kausalitet = ROC(H) höger halvplan

Rep Fourierserie

Fungerar bara för periodiska signaler.

$x:(-\infty,\infty)\rightarrow\mathbb{C}$
Det existerar ett $T>0$ s.a. $x(t+T)=x(t)$ för alla t.
$c_k=c_k(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j\omega_k t}dt$, $\omega_k=\frac{2\pi k}{T}$, $k\in\mathbb{Z}$
$x(t)\rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}$

Om x är två ggr deriverbar $\Rightarrow x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{j\omega_k t}$ för alla t.
Om x är två ggr deriverbar förutom i hopp-diskont. s.a. både höger/vänsterderivator existerar:
$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{j\omega_k t}$ för alla t vilka ej är hoppunkt!
Om t är en hoppunkt, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{j\omega_k t}=\frac{1}{2}(x(t_0^+)+x(t_0^-))$ (höger-/vänstergränsvärden)

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\underbrace{e^{-j\omega_k t}}_{\cos(\omega_k t)-j\sin(\omega_k t)}dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T x(t)\cos(\omega_k t)dt - j\int_0^T x(t)\sin(\omega_k t)dt\right) = A_k - jB_k$$

Om x T-periodisk: $\int_0^T x(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \int_{-T/4}^{T/4} x(t)dt = \ldots$

Om x jämn: $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 2\cdot\int_0^{T/2} x(t)dt$

Om x udda: $\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 0$

$x(t) = x_{even}(t) + x_{odd}(t) = \frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$

Om $x(t)$ T-periodisk $\Rightarrow$ x_{even} & x_{odd} T-periodisk

$$\begin{matrix} x_{even}\cdot\cos(\omega_k t) & \text{jämn} \\ x_{even}\cdot\sin(\omega_k t) & \text{udda}\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\int_{-T/2}^{T/2} x_{even}(t)\cos(\omega_k t)dt = 2\int_0^{T/2} x_{even}(t)\cos(\omega_k t)dt \\ \int_{-T/2}^{T/2} x_{even}\sin(\omega_k t)dt = 0\end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_{odd}\cdot\cos(\omega_k t) & \text{udda} \\ x_{odd}\cdot\sin(\omega_k t) & \text{jämn}\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases}\int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}(t)\sin(\omega_k t)dt = 2\int_0^{T/2} x_{odd}(t)\sin(\omega_k t)dt \\ \int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}\cos(\omega_k t)dt = 0\end{cases}$$

$$C_k(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{even}\cdot\cos(\omega_k t)dt - \frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{even}\cdot\sin(\omega_k t)dt + \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}\cdot\cos(\omega_k t)dt - \frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_{odd}\sin(\omega_k t)dt =$$

$$\underbrace{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{even}(t)\cos(\omega_k t)dt}_{A_k} - j\underbrace{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{odd}\cdot\sin(\omega_k t)dt}_{B_k}$$

$$\boxed{\begin{matrix} C_k = A_k - jB_k \\ C_{-k} = A_k + jB_k \end{matrix}}$$

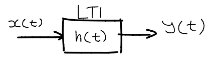
Notis!

$$\omega_{-k} = \frac{-2\pi k}{T} = -\omega_k \quad \begin{cases} A_{-k} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{even}(t)\cos(-\omega_k t)dt = A_k \\ B_{-k} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x_{odd}(t)\sin(-\omega_k t)dt = -B_k\end{cases}$$

Laplacetransform

En mer generell metod för att studera kontinuerliga LTI-system och signaler.

Låt $x(t)=e^{st}$ där $s=\sigma+j\omega$.



Den tidsberoende insignalen. Kallas egenfunktion.

$$y(t)=(h*x)t=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau=e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau}_{H(s)=\text{ Laplacetransform}}=e^{st}\cdot H(s)$$

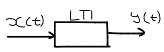
Komplex, beror av tid. Kallas egenvärde till e^{st}.

$e^{-st}=e^{-(\sigma+j\omega)t}=e^{\sigma t}e^{-j\omega t}$, $\mathcal{L}\{x(t)\}=X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{x(t)e^{-\sigma t}}e^{-j\omega t}\,dt=FT\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

Konvergenskrav hos fouriertransformen $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)e^{-\sigma t}|\,dt<+\infty$

De värden på $\sigma=Re(s)$ för vilka integralen konvergerar kallas Laplacetransformen konvergensområde ROC. Om ROC omfattar $j\omega$-axeln i s-planet kan vi sätta $\sigma=0$. $X(s)|_{s=j\omega}=X(j\omega)$ (FT) Fouriertransformen är då lika med Laplacetransformen utvärderad på $j\omega$-axeln i s-planet.

——— x ———



Antag att vi har ett kontinuerligt LTI-system där sambandet mellan insignal och utsignal beskrivs av en diff.ekvation.

Allmänt $a_N\frac{d^Ny}{dt^N}+a_{n-1}\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}+\dots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0\,y(t)=b_M\frac{d^Mx}{dx^M}+b_{M-1}\frac{d^{M-1}x}{dx^{M-1}}+\dots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0x(t)$

Alt: $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky}{dy^k}y(t)=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx}{dx^k}x(t)$

Laplacetransformera

Antag system i vila (beg. värden $=0$)

$\sum_{k=0}^{N}a_ks^kY(s)=\sum_{k=0}^{M}b_ks^kX(s)$ Bryt ut: $Y(s)\sum_{k=0}^{N}a_ks^k=X(s)\sum_{k=0}^{M}b_ks^k$

Bilda kvot: $\frac{Y(s)}{X(s)}=H(s)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_ks^k}{\sum_{k=0}^{N}a_ks^k}$ detta är en vanlig form av Laplace-T i våra ingenjörstillämpningar. En kvot mellan polynom i S.

Polynomen kan även skrivas på faktoriserad form som:

$H(s)=\frac{b_M\prod_{k=1}^{M}(s-c_k)}{a_N\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)}$ i Matlab kan man plotta pzmap då är × d_k: Poler till $H(s)$ som är rötter till nämnarpolynomet.

○ c_k: Nollställen till $H(s)$, rötter till täljarpolynomet.

Grafen innehåller all info om systemet $H(s)$ förutom skalfaktorn $\frac{b_M}{a_N}$.

Om vi behåller samma system har vi: $x(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}X(s)$

$y(t)\longleftrightarrow Y(s)$

$h(t)\longleftrightarrow H(s)$

Faltning

I tidsdomänen vet vi att $y(t)=(h*x)(t)\overset{LT}{\longleftrightarrow}Y(s)=H(s)X(s)\Rightarrow\frac{Y(s)}{X(s)}=H(s)$

Samma resultat som när vi utgick från diff.ekv. (Vilken tur! :))

$H(s)$: Systemets överföringsfunktion $H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$ $h(t)$ är systemets impulssvar.

Invers Laplacetransform

Utgå ifrån $H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$ (en kvot av polynom i s)

$B(s)$: Ordning M

$A(s)$: Ordning N

Om $M \geq N \Rightarrow$ Polynomdivision krävs, men i fysikaliska system är det nästan alltid så att $M \leq N$.

Division ger: $H(s) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M-N} c_k \cdot s^k}_{\text{Rent polynom}} + \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$

$\tilde{B}(s)$: Ordning $N-1$

$A(s)$: Ordning N

Partialbråksuppdela kvoten, detta ger en summa av enklare termer vilka kan inverstransformeras var och en ~~för~~ sig.

Ty bara def $t>0$ Vänstra halvplanet

$\propto$ 1a ordningens term: reell pol, $s=d_k \Rightarrow \frac{A_k}{s-d_k} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} A_k \cdot e^{d_k t} \cdot u(t) \longrightarrow 0$ om $d_k < 0 \Rightarrow$ Pol i VHP.

Forts. invers Laplacetransform

Efter Partialbråksuppdelning fås: Första ordningens term för en reell pol.

$$\frac{A_k}{s-d_k} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} A_k \cdot e^{d_k t} \cdot u(t) \rightarrow 0 \quad \text{om } d_k<0\text{, pol } s=d_k \text{ ligger i VHP}$$

Minitabell

$f(t)$	$F(s)$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$

Andra ordningens termer för komplexa poler.

Nämnare: $(s-s_1)(s-s_2)=\{s_1=s_2^*\}=(s+\alpha+j\omega_0)(s+\alpha-j\omega_0)=(s+\alpha)^2+\omega_0^2=$
$s^2+2s\alpha+\alpha^2+\omega_0^2$

Ansats i PBU: $\frac{As+B}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$, lös för A och B.

Skriv om som: $\frac{A(s+\alpha)+B-A\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} = A\cdot\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} + \frac{B-A\alpha}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

Invers Laplacetransform ger:

$$Ae^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega_0 t) + \frac{B-A\alpha}{\omega_0}\cdot e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega_0 t) \quad , t\geq 0$$

Notera att uttrycket går mot 0 om $\alpha>0$.
$\mathrm{Re}\{s_1\}=\mathrm{Re}\{s_2\}<0$, alltså poler i VHP.

Krav för stabilitet hos ett kausalt system är att alla poler hos dess överföringsf. ligger i s-planets vänstra halvplan.

Praktiskt Råd

Division mellan polynom av samma gradtal ($M=N$).

Ex $H(s)=\frac{s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$

Ansats för PBU kan ej göras direkt. ☹

$$H(s)=\frac{s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}=\frac{s^2+a_1s+a_0+b_1s+b_0-a_1s-a_0}{s^2+a_1s+a_0}=1+\frac{s(b_1-a_1)+(b_0-a_0)}{s^2+a_1s+a_0}=1+\{PBU\}\ !$$

Re-cap

$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$, $x(t)=0$ om $t<0$, $s=\sigma+j\omega$

$X(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt=\int_0^{\infty}\boxed{x(t)e^{-\sigma t}}\cdot e^{-j\omega t}dt=\mathcal{F}_t\{x(t)e^{-\sigma t}\}$

Om $\sigma=0 \Rightarrow s=j\omega \Rightarrow X(j\omega)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ (= Fouriertransformen)

Om signalen $x(t)=h(t)$ är impulssvaret till ett kausalt LTI-system är:
$H(j\omega)=\int_0^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$ systemets frekvenssvar!

$$A\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{\begin{matrix}G(s)\\ G(j\omega)\end{matrix}} \rightarrow A|G(j\omega)|\cos(\omega t+\arg\{G(j\omega)\})$$

Egenskaper i frekvensplanet

Utgå ifrån ett kausalt och stabilt LTI-system med överf. $G(s)$ och frekvenssvaret $G(j\omega)=G(s)|_{s=j\omega}$

Bodediagram

En grafisk presentation av frekvenssvaret innehållandes två delar. 1) Amplituddiagram (belopp) med logaritmiska skalor (frekvens & amplitud [dB]). $|G(j\omega)|_{dB}=20\ {}^{10}\log(|G(j\omega)|)$.
2) Fasdiagram med logaritmisk frekvensskala men "vanlig" arg-axel. $\arg\{G(j\omega)\}$.

Konstruktion

Faktorisera överföringsfunktionen $G(s)$. $G(s)=\frac{C_1(s)\cdot C_2(s)\cdot\ldots\cdot C_M(s)}{D_1(s)\cdot D_2(s)\cdot\ldots\cdot D_N(s)}$ Faktorerna $C_i(s)$ & $D_i(s)$ är:

K: en konstant

s: "derivering/integrering"

$1+\frac{s}{\omega_1}$: 1a grads faktor

$1+s\frac{2\alpha}{\omega_2}+\frac{s^2}{\omega_2}$: 2a gradsfaktor (komplexa rötter)

Frekvenssvarets belopp

$$|G(j\omega)|=\frac{|C_1(j\omega)|\cdot|C_2(j\omega)|\cdot\ldots|C_M(j\omega)|}{|D_1(j\omega)|\cdot|D_2(j\omega)|\cdot\ldots|D_N(j\omega)|}$$

$$|G(j\omega)|_{dB}=|C_1(j\omega)|_{dB}+|C_2(j\omega)|_{dB}+\ldots+|C_M(j\omega)|_{dB}-|D_1(j\omega)|_{dB}-|D_2(j\omega)|_{dB}-\ldots-|D_N(j\omega)|_{dB}$$

Frekvenssvarets fas $\angle G(j\omega)=\arg\{G(j\omega)\}$

$$\angle G(j\omega)=\angle C_1(j\omega)+\ldots+\angle C_M(j\omega)-\angle D_1(j\omega)-\angle D_N(j\omega)$$

Notera!

Superposition av bidrag från varje delfaktor både för att erhålla $|G(j\omega)|_{dB}$ och $\angle G(j\omega)$.

x

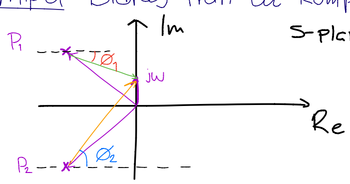
För en generell överföringsfunktion: $H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$

Faktorisera: $H(s)=\frac{b_M}{A_N}\frac{\prod_{k=1}^{M}(s-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s-p_k)}$, $s=z_k \Leftrightarrow$ nollställe, $s=p_k \Leftrightarrow$ pol

Frekvenssvar $H(s)|_{s=j\omega}$: $|H(j\omega)|=\left|\frac{b_M}{A_N}\right|\frac{\prod_{k=1}^{M}|j\omega-z_k|}{\prod_{k=1}^{N}|j\omega-p_k|}=\left|\frac{b_M}{A_N}\right|\frac{\text{"Produkt av längder på nollställevektorer"}}{\text{"Produkt av längder på polvektorer"}}$

$$\arg\{H(j\omega)\}=\sum_{k=0}^{M}\arg(j\omega-z_k)-\sum_{k=0}^{N}\arg(j\omega-p_k)$$

Exempel Bidrag från ett komplext polpar



$|H(j\omega)|=\frac{\cdots}{|j\omega-P_1||j\omega-P_2|}$

$\varnothing_1=\arg\{j\omega-P_1\}$

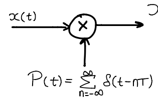
$\varnothing_2=\arg\{j\omega-P_2\}$

Fouriertabell	Periodic	Non-Periodic
Continious	Fourier Series	Fourier transform
Discrete	Discrete-Time Fourier series	Discrete-Time Fourier Transform

Re-Cap

Skapa en diskret signal av en kontinuerlig signal

Modell:



$x_p(t)=P(t)\cdot X(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)$

Låt oss Fouriertransformera $x_p(t)$ direkt.

$$X_p(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_p(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)\right)e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)e^{-j\omega t}dt=\left\{\begin{matrix}\text{endast nollskiljda}\\ \text{bidrag om } t=nT\end{matrix}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\omega nT}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)dt}^{=1}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Låt: } x(nT)=x[n],\\ \omega t=\Omega\end{matrix}\right\}=\underline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}}$$

Detta är fouriertransformen för en icke periodisk diskret signal och den tecknas: $X(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$: DTFT Boken skriver: $X(\Omega)$

Egenskaper för DTFT

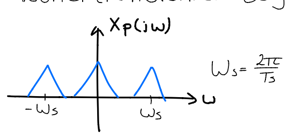
- $X(e^{j\Omega})$ är kontinuerlig i sin variabel Ω.
- $X(e^{j\omega})$ är periodisk i Ω.

$$X(e^{j(\Omega+2k\pi)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j(\Omega+2k\pi)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\cdot e^{-j2\pi kn}=\{k,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow e^{-j2k\pi n}=1\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}=X(e^{j\Omega})$$

$X(e^{j\Omega})$ är alltså periodisk i Ω med 2π.

$$\underbrace{x[n]}_{\substack{\text{Diskret}\\ \text{Icke periodisk}}}\overset{DTFT}{\longleftrightarrow}\underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\substack{\text{Kontinuerlig}\\ \text{periodisk}}}$$

Kom nu ihåg hur fouriertransformen såg ut för vårt viktade impulståg $x_p(t)$ då sampling introducerades.



$X_p(j\omega)$ är också periodisk, men i ω och med perioden $\omega=\omega_s$. Men $\Omega=\omega T$, låt $\Omega=2\pi\Rightarrow$ $\omega=\frac{\Omega}{T}=\frac{2\pi}{T}=\omega_s$. $\Omega=2\pi$ motsvar samplingsvinkelfrekvensen ω_s och "ett sampel per period".

Enheter

$[\omega]$: $\frac{rad}{s}$

$[T]$: s

$[\Omega]$: rad alt $\frac{rad}{sampel}$

Synteseкvation (invers DTFT)

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

Periodiska i Ω med 2π.

Integration över ~~ett~~ godtyckligt intervall om 2π.

Superposition av bassignal: $e^{j\Omega n}=\cos(\Omega n)+j\sin(\Omega n)$ med viktfunktion $X(e^{j\Omega})$.

Exempel Beräkna DTFT för $x[n]=\alpha^n\cdot u[n]$ med $0\leq\alpha<1$

$$X(e^{j\Omega})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\cdot e^{-j\Omega})^n=\left\{\begin{matrix}\text{Geometrisk}\\ \text{Serie}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{1-\alpha\cdot e^{-j\Omega}}$$

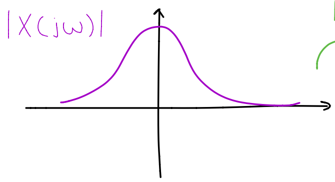
Kvar: $|\alpha e^{-j\Omega}|=|\alpha|<1$, $X(e^{j\Omega})=\frac{1}{1-\alpha\cos(\Omega)+j\sin(\Omega)}$

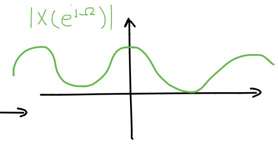
Notera! Periodisk, i Ω med 2π.

$$|X(e^{j\Omega})|=\frac{1}{((1-\alpha\cos(\Omega))^2+(\alpha\sin(\Omega))^2)^{1/2}}=\frac{1}{(1-2\alpha\cos(\Omega)+\alpha^2\cos^2(\Omega)+\alpha^2\sin^2(\Omega))^{1/2}}=\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos(\Omega))^{1/2}}$$

$$\arg\{X(e^{j\Omega})\}=-\arctan\left(\frac{\alpha\sin(\Omega)}{1-\alpha\cos(\Omega)}\right)$$

För motsvarande kontinuerliga signal: $x(t)=e^{-at}u(t)$ har vi fouriertransformen $X(j\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$
med: $|X(j\omega)|=\frac{1}{(a^2+\omega^2)^{1/2}}$, $\arg\{X(j\omega)\}=-\arctan(\frac{\omega}{a})$





Vi ser att $|X(j\omega)|$ upprepas periodiskt i $|X(e^{j\Omega})|$.
Genom att välja en lämplig samplingsfrekvens kan effekten av aliasing/vikning minskas och $X(j\omega)$ återfinns (i stort sett) i $X(e^{j\Omega})$ i intervallet $-\pi<\Omega<\pi$.

En kontinuerlig signals fouriertransform ($x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$) kan alltså erhållas ur den samplade signalens fouriertransform med $|\Omega|<\pi$ ($x[n]=x(nT) \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\Omega})$) om effekten av aliasing kan göras tillräckligt liten. För praktiska beräkningar återstår dock några problem.

$$x(t) \xrightarrow{\text{Samplas}} \underset{\text{Diskret}}{x[n]} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \underset{\text{Kontinuerlig}}{X(e^{j\Omega})}$$

För numeriska beräkningar är kontinuerliga funktioner olämpliga.
Beräkna $X(e^{j\Omega})$ endast för vissa frekvenser i intervallet $\Omega=[0,2\pi]$. Välj $\Omega_k=\frac{2\pi}{N}\cdot k$, $k=0,1,2,\ldots N-1$
Vi landar nu i det som kallas Diskret Fouriertransform (DFT).

Diskret Fouriertransform

En godtycklig icke-periodisk diskret signal $x[n]$ har fouriertransformen (DTFT) $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\Omega n}$.

$X(e^{j\Omega})$ är kontinuerlig och periodisk i Ω med 2π.

Syntesekv (invers DTFT) $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\text{Viktfunktion}}\underbrace{e^{j\Omega n}}_{\text{Bassignal}} d\Omega$

Periodiska med 2π.

Notera uppbyggnad av $x[n]$: Superposition av viktade bassignaler $e^{j\Omega n} = \cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n)$.

Vid praktiska beräkningar

Signalen $x[n]$ måste ha begränsad längd. Dessutom är det önskvärt om transformen X också är diskret. En alternativ fourierrepresentation har därför utvecklats: DFT.

- DFT$\{x[n]\}$ är en diskret sekvens.
- DFT motsvarar samplade värden längs frekvensaxeln, av den kontinuerliga fouriertransformen DTFT, enligt: DTFT$\{x[n]\} = X(e^{j\Omega})$ i ett intervall om 2π. ($[0, 2\pi]$) där $\Omega = \Omega_k = \frac{2\pi}{N}\cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Effektiva beräkningsalgoritmer för att beräkna DFT kallas Fast Fourier Transform (FFT).

DFT in action

Vi har tillgång till (eller väljer) L st värden (sampel) i vår signal. $x[n] = 0, 1, 2, \ldots, L-1$.

Signalens DTFT är $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{j\Omega n}$. Det är en ändlig summa (nice!) men det är opraktiskt med "oändligt många" Ω-värden. Låt oss ta N st sampel av $X(e^{j\Omega})$ och göra beräkningar för $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}\cdot k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Beteckna dessa "sampel" med $X[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}n\cdot k}$

Man kan visa att $x[n]$ kan återskapas ur $X[k]$ om $N \geq L$. Det är vanligt att låta $N = L$.

$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \Rightarrow x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k]$

Notera uppbyggnaden av $x[n]$: Superposition av bassignaler $\phi_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n}$ med viktfunktion $X[k]$.

Egenskaper $\phi_k[n]$

- $\phi_k[n+N] = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot k(n+N)} = e^{j\frac{2\pi}{N}k\cdot n}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}k\cdot N} = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot k\cdot n}\cdot 1 = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}$ Periodisk i n med N.
- $\phi_{k+N}[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kN} = e^{j\frac{2\pi}{N}k\cdot n}\cdot 1 = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ Det finns bara N st unika bassignaler $\phi_k[n]$.

Tidsdiskreta LTI-system

$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$

- Stabilt om $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < +\infty$
- Kausalt om $h[k] = 0 \quad k<0$

Z-transformen

$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}, \; z \neq 0, \; z \in \mathbb{C}$ jmfr med Laplace; $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad s \in \mathbb{C}$

Byt $t \to k$

$0 \neq e^{s} = z$

Egenskaper

Viktigt att ROC överlappar för H och X.

1) $y[n] = (h*x)[n] \leftrightarrow Y(z) = H(z)X(z)$
2) $w[n] = x[-n] \leftrightarrow W(z) = X(z^{-1})$
3) $y[n] = x[n-n_0] \leftrightarrow Y(z) = z^{-n_0} \cdot X(z)$
4) $y[n] = \alpha^n u[n] \leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \; |z| > \alpha$
5) $y[n] = a^n x[n] \leftrightarrow Y(z) = X(\frac{z}{a})$

Ex: $x[n] = u[n] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{z^{-n}}_{(\frac{1}{z})^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \; \underbrace{|z|>1}_{ROC}$

Bevis: $W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^{-1})^{-n} = X(z^{-1})$

Ex Tenta 2015-30-03, Uppg 2

Givet

LTI-system $y[n] = (h*x)[n]$

$h[n] = 2^n u[n]$

Sökt

a) Stabilt? Kausalt?

b) Bestäm $H(z)$s ROC.

c) Om $x[n] = u[n]$, vad blir $y[n]$

Lösning

a) Stabilt $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \{\text{geometrisk summa}\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 < +\infty$

Kausalt $\Leftrightarrow h[k] = 0$ för $k<0$, ej uppfyllt ty $h[-1] = 2^{-1} \Rightarrow$ Ej kausalt.

b) $h[n] = w[-n]$ där $w[n] = 2^{-n}u[n]$.

Egenskap 2 $\Rightarrow H(z) = W(z^{-1}) \overset{4}{\Rightarrow} W(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}, \; |z| > \frac{1}{2} = \alpha \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}, \; |z| < 2 (= \frac{1}{\alpha})$

c) Egenskap 1) $\Rightarrow Y(z) = H(z)U(z)$

$Z\{u[n]\} = U(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z|>1$

$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \cdot \frac{z}{z-1}, \quad 1<|z|<2 \qquad \boxed{\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}}$

Hur hittar vi $y[n]$? PBU!

$\frac{1}{(1-\frac{z}{2})(1-\frac{1}{z})} = \frac{A}{(1-\frac{z}{2})} + \frac{B}{1-\frac{1}{z}} \Rightarrow y[n] = A \cdot 2^{-n}u[-n] + Bu[n]$

Ex $y[n] = 2^n u[5-n]$, vad är $Y(z)$?

$y[n] = 2^n u[5-n] = 2^n u[-(n-5)] = 2^n \cdot w[n-5] = \{\underbrace{w[n] = u[-n]}_{\text{egenskap 2}}\} = 2^5 2^{n-5} \cdot w[n-5] = 2^5 \, q[n-5] = \{\underbrace{q[n] = 2^n w[n]}_{\text{egenskap 4}}\}$

Egenskap 3 $\Rightarrow Y(z) = 2^5 \cdot Q(z) \cdot z^{-5}$

Egenskap 5 $\Rightarrow Q(z) = W(\frac{z}{2})$

Egenskap 2 $\Rightarrow W(z) = U(z^{-1})$

Egenskap 4 $\Rightarrow U(z^{-1}) = \frac{1}{1-z}, \; |z|>1$

Baklänges $\Rightarrow$

$W(z) = \frac{1}{1-z}, \; |z|<1$

$Q(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}, \; |\frac{z}{2}|<1 \Rightarrow |z|<2$

$Y(z) = 2^5 \cdot z^{-5} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}, \; |z|<2$

Ex 11.16

Givet

Kausalt LTI-system.

$y[n] = x[n] + y[n-1]$

Sökt

a) Finn $h[n]$

b) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] \Rightarrow y[n]$?

c) Stabilt?

Lösning

a) LTI $\Rightarrow y[n] = (h * x)[n]$

$Y(z) = H(z)X(z)$

Z-transform av den givna signalen: $Y(z) = X(z) + z^{-1} \cdot Y(z)$

$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)$

$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ ROC?

B: $\begin{cases} h[n] = u[n] \\ h[n] = u[-n-1] \end{cases}$ eftersom vi inte vet ROC !!

Eftersom kausalt $\Rightarrow u[n]$ eftersom $u[-n-1] \neq 0$ för $n<0$

$n = -2 \Rightarrow u[-(-2)-1] = u[1]$

b) $Y(z) = H(z)X(z)$

Eg 4 $\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$ ROC $|z| > 1$ & $|z| > \frac{1}{2}$

PBU: $Y(z) = \frac{A}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow y[n] = A \cdot u[n] + B \cdot (\frac{1}{2})^n u[n]$

c) Stabilt $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty \Rightarrow$ Ei stabilt :(

Note!

Stabila system har ROC $\supset \{z = 1\}$. I vårt fall $ROC(H) = \{|z| > 1\} \not\supset \{|z| = 1\}$

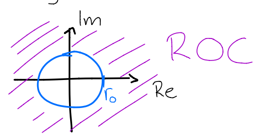
Repetition

Z-transform för en generell sekvens (diskret signal) $x[n] \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$, $z = r\cdot e^{j\Omega}$

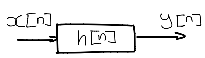
$X(z)=X(re^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x[n]\cdot r^{-n})e^{-j\Omega n} = DTFT\{x[n]\cdot r^{-n}\}$

Konvergens om $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]\cdot r^{-n}|<\infty$, konvergens beror på $|z|=r$.

De värden på z för vilka $X(z)$ konvergerar kallas konvergensområde (ROC).
För en kausal signal $(x[n]=0,\ n<0)$: $\sum_{n=0}^{\infty}|\frac{x[n]}{r^n}|<0$. Antag nu att summan konvergerar för $r=r_0$ då konvergerar den även för $r>r_0$. ROC är alltså området utanför en cirkel med radie r_0.



Systemanalys



$h[n]$: Impulssvar till ~~ett~~ kausalt LTI-system.
$y[n]=(h * x)[n]$
$\mathcal{Z}$: $Y(z)=H(z)X(z)$

Insignal	Utsignal
$x[n]=\delta[n] \Rightarrow X(z)=1$	Impulssvar: $Y(z)=H(z)$
$x[n]=u[n] \Rightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}$	Stegssvar: $Y(z)=H(z)\frac{z}{z-1}$
Sinusar	Sinusar med annan amp och fas

$H(z)=\mathcal{Z}\{h[n]\}$ "systemets överföringsfunktion"
För ett kausalt system $(h[n]=0,\ n<0)$ kan vi efter faktorisering och PBU erhålla en summa av termer enligt $H_k(z)=\frac{r_k}{1-d_k z^{-1}}=r_k\frac{z}{z-d_k}$. Detta motsvarar signalen $h_k[n]=r_k\, d_k^n\, u[n]$.
För ett stabilt system måste absolutbeloppet av impulssvaret vara absolutsummerbart.

$r_k\sum_{n=0}^{\infty}|d_k|^n<\infty$, vilket kräver att $|d_k|<1$. Jämför summa för en geometrisk serie: $\sum_{k=0}^{\infty}a^k=\frac{1}{1-a}$, $|a|<1$.

Diskreta LTI-system kan beskrivas med differensekvationer
$y[n]+\sum_{k=1}^{N}a_k\, y[n-k]=\sum_{k=0}^{M}b_k\, x[n-k]$

Z-transformera genom att använda egenskaper för linjäritet och tidsskift.
$Y(z)+\sum_{k=1}^{N}(a_k z^{-k}\, Y(z))=\sum_{k=0}^{M}(b_k z^{-k}\, X(z))$
$Y(z)(1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k})=X(z)\sum_{k=0}^{M}b_k\, z^{-k}$

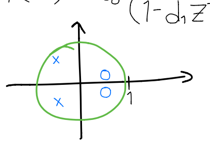
$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$

Men $Y(z)=H(z)X(z)$ där $H(z)$ är systemets överföringsfunktion. Detta är en vanlig form på z-transformen i våra ingenjörstillämpningar: en kvot mellan polynom i z^{-1} (eller i z). En rationell funktion.

$H(z)=\dfrac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\dots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\dots+a_Nz^{-N}}$, men detta är inte så överskådligt så vi faktoriserar.

$H(z)=b_0\dfrac{(1-c_1z^{-1})(1-c_2z^{-1})\dots(1-c_nz^{-1})}{(1-d_1z^{-1})(1-d_2z^{-1})\dots(1-d_Nz^{-1})}$

c_k: Nollställe till $H(z)$ aka rötter till täljarpolynomet.
d_k: Poler till $H(z)$ —— " —— nämnarpolynomet.

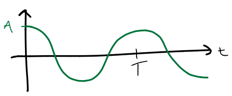


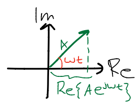
Kort Summering för ROC-egenskaper

- Inga poler i ROC!
- För en kausal signal: ROC = området utanför cirkel med radie r_0
- r_0 är det största av beloppen till $H(z)$'s poler om sådana finns.
- Om enhetscirkeln ligger i ROC $\Rightarrow H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega}) = \text{DTFT}\{h[n]\}$ (DTFT existerar)

Frekvenser och Sampling

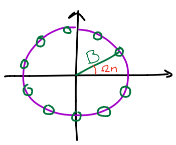
En kontinuerlig signal $x(t) = A\cos(\omega t) = \text{Re}\{A e^{j\omega t}\}$

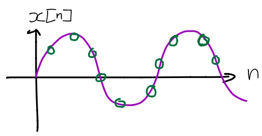




ω: $\frac{\text{rad}}{s}$

$x[n] = B\cdot\cos(\Omega n) = \text{Re}\{B e^{j\Omega n}\}$





Ω: rad

Om vi har ~~ett~~ samplat system: $x[n] = x(nT)$ där T: sampleintervall

Låt oss sampla en sinusformad signal: $x(nT) = A\cdot\cos(\omega nT) = A\cdot\cos(\omega T\cdot n)$

Alltså: $\Omega = T\omega$

Samplingsteoremet

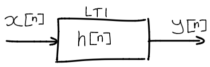
Signalens högsta frekvens för att undvika aliasing vid återskapning av signalen $\Rightarrow \omega_s > 2\omega_M$ $\left(\omega_s = \frac{2\pi}{T}\right)$

Om signalfrekvens och sampling frekvens är lika $\Rightarrow \Omega = \omega T = \omega_s \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} = 2\pi \Rightarrow$ Vi samplar signalen en gång per period.

Om signalfrekwensen: $\omega = \omega_M = 0.5\,\omega_s \Rightarrow \Omega = \pi \Rightarrow$ Vi samplar signalen två ggr per period.

Om signalfrekvensen: $\omega = \omega_M = \frac{1}{M}\omega_s \Rightarrow \Omega = \frac{2\pi}{M} \Rightarrow$ Vi samplar M ggr per period.

Frekvenssvar hos diskreta LTI-system



* Kausalt: $h[n]=0,\ n<0$

Låt $x[n]=z^n \quad (z \in \mathbb{C})$.

$y[n] = (h * x)[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot z^n z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n \cdot H(z)$

Vi får alltså $y[n]=z^n H(z)$.

För en diskret, sinusformad, signal: $z=e^{j\Omega}$ och $z^n=e^{j\Omega n}= \cos(\Omega n)+j\sin(\Omega n)$

$y[n]=e^{j\Omega n} \cdot H(e^{j\Omega})$ där H är systemets frekvenssvar vilket påverkar amplitud och fas för den diskreta, sinusformade, signalen.

$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| \cdot e^{j\arg\{H(e^{j\Omega})\}}$

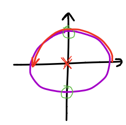
Ex

$y[n] = x[n]+x[n-2]$

$\mathcal{Z}(y[n]) \Rightarrow Y(z) = X(z)+z^{-2}X(z) \Leftrightarrow Y(z)=X(z)(1+z^{-2}) \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = (1+z^{-2}) = \frac{z^2+1}{z^2} = H(z)$

Nollställe: $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

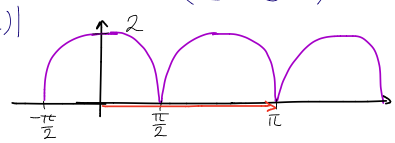
Pol: $z^2=0 \Leftrightarrow z=0$ (dubbelpol)



klockan blev leet

Frekvenssvar: $z=e^{j\Omega}$, $H(e^{j\Omega}) = 1+e^{-2j\Omega} = e^{-j\Omega}(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}) = 2e^{-j\Omega}\cos(\Omega)$

Amplitudpåverkan: $|H(e^{j\Omega})| = 2|\cos(\Omega)|$



Sampling, $\Omega=\frac{\pi}{2}$

Detta skulle innebära att hela signalen släcks ut till följd av $x[n]+x[n-2]$.

Sammanfattning

$\underbrace{X(j\omega)}_{\substack{\text{kontinuerlig} \\ \text{icke-periodisk}}} \overset{FT}{\Leftrightarrow} \underbrace{x(t)}_{\substack{\text{kontinuerlig} \\ \text{icke-periodisk}}} \xrightarrow{\text{Samplas}} \underbrace{x[n]}_{\substack{\text{diskret} \\ \text{icke-periodisk}}} \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} \underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\substack{\text{kontinuerlig} \\ \text{Periodisk i } \Omega}} \xrightarrow[DFT]{\Omega_k=\frac{2\pi}{N}\cdot k} \underbrace{X[k]}_{\substack{\text{diskret} \\ \text{Periodisk}}}$

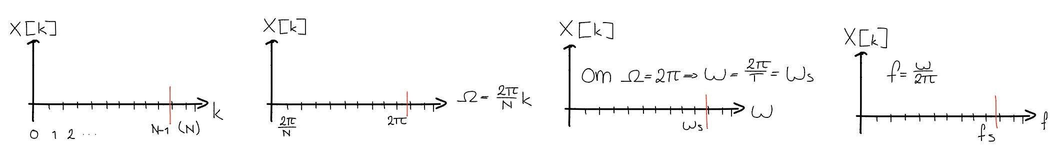
En kontinuerlig signals fouriertransform kan erhållas ur den samplade signalens fouriertransform (DTFT) om effekten av aliasing kan göras tillräckligt liten.

Mer om DTFT

Samband mellan k, ω, Ω och f.

$x(t)=\sin(\omega t)$ samplas: $t=nT \Rightarrow \sin(\omega nT)=\sin(\omega T n)=\sin(\Omega n)|_{\Omega=\omega T}$

DFT's frekvensaxel:



Tentamen Aug 2015

2) $y[n] = 2(0.2^n - (-0.6)^n) \cdot u[n]$

$\mathcal{Z} \Rightarrow Y(z) = \frac{2 \cdot 1}{1-0.2z^{-1}} - \frac{2 \cdot 1}{1+0.6z^{-1}} = \left\{ \begin{matrix} \text{gör} \\ \text{liknämnigt} \end{matrix} \right\} = \frac{2 \cdot 0.8 \cdot z^{-1}}{(1-0.2z^{-1})(1+0.6z^{-1})}$

$x[n] = (-0.6)^n u[n]$

$\mathcal{Z} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1+0.6z^{-1}}$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1.6z^{-1}}{1-0.2z^{-1}} = \frac{1.6}{z-0.2}$ = överföringsfunktion

Diffekv: $Y(z) = (1-0.2 \cdot z^{-1}) = X(z) \cdot 1.6 z^{-1}$

$Y(z) - 0.2z^{-1} Y(z) = 1.6 \cdot z^{-1} \cdot X(z)$

invers transform

$y[n] - 0.2y[n-1] = 1.6x[n-1]$

5) Aktuell signals fourierserie: $x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n \cdot \frac{\pi}{L} t)$

$A_n = 0, \forall n$. $B_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{L} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Systemets frekvenssvar: $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{400}{(j\omega+20)^2}$

Amplitudpåverkan: $|G(j\omega)| = \frac{400}{\omega^2+20^2}$

Amplitud hos utsignal:

$n=1, \omega=\omega_0$: $B_1^y = |B_1||G(j\omega_0)| = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{400}{10^2+20^2} = 0.509$

$n=2, \omega=2\omega_0$: $B_2^y = |B_2||G(j2\omega_0)| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{400}{20^2+20^2} = 0.159$

$n=3, \omega=3\omega_0$: $B_3^y = |B_3||G(j3\omega_0)| = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{400}{30^2+20^2} = 0.065$