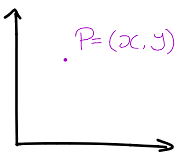
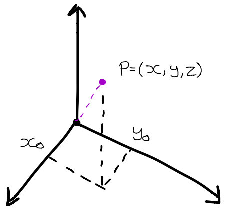
Dagens Meny: 10.1 Analytisk geometri i rymden
10.5 Kvadratiska ytor

10.1|

En vektor i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas på formen $P=(x,y)$
En vektor i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas på formen $P=(x,y,z)$

Dessa är exempel på kartesiska koordinater.

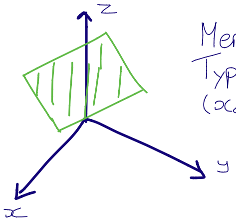




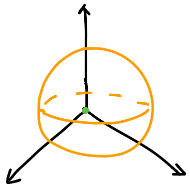
Avstånd mellan punkterna $P=(x_0,y_0,z_0)$ och $Q=(x_1,y_1,z_1)$ ges av $\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$

Ex

$Ax+By+Cz=D$ är ett plan i rymden. (Linalg)



Mer allmänt kan man betrakta objekt givna av ekvationer: $f(x,y,z)=0$
Typiskt exempel som inte är ett plan är en sfär med radie r och centrum (x_0,y_0,z_0): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$



Mer patologiskt exempel: $x^2+y^2+z^2=0 \rightsquigarrow (0,0,0)$

Ex

Kan vara flera ekvationer. $\underbrace{x^2+y^2+z^2=1}_{\text{enhets sfär}}$ $\underbrace{z=\frac{1}{2}}_{\text{Plan}}$

Ex

Kan också ha objekt av olikheter. $0 \leqslant y+x+z \leqslant 1$
Betrakta extremvärdena för att få en känsla för objektet.

Ex

$x^2+y^2+z^2=1$ (sfär)
$x+y=1$ (Plan)

Den cirkel i planet $x+y=1$ med centrum i punkten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.5| Kvadratiska Ytor

Def: En kvadratisk yta är ett geometriskt objekt beskrivet av en kvadratisk ekv.

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

Kvadratiska ytor kommer "ersätta" x^2 i taylorutvecklingar. Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finns Taylorutv
$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+\dots$
Andraderivatan kontrollerar om x_0 är lokalt max/min. | flera variabler ersätts termen $f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}$ med en kvadratisk term som har formen av en kvadratisk yta.

Ex

$Y=(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ (typ en parabolisk cylinder, saknas lite som kommer på nästa förelä..)

10.1

Def Topologiska objekt

En mängd $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

{boll av punkter med avstånd $<r$ till P}

- En omgivning av en punkt $P \in \mathbb{R}^n$, är en mängd $S \in \mathbb{R}^n$ som är på formen $B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid |P-Q| < r\}$

Ex: $n=1$ öppet intervall  $(0,1) = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$
$n=2$ öppen disk
$n=3$ öppen sfär

- S är öppen om varje punkt, $P \in S$, har en omgivning som ligger i S.

Ex:
- En omgivning är öppen.
- Objekt som är givna av strikta olikheter är öppna.
  Viktigt för kontinuitet.

- Komplementet till S, S^c, är alla punkter, $P \in \mathbb{R}^n$, som inte ligger i S.
- S är sluten om S^c är öppet.
  Viktigt i optimeringsproblem.

Ex: Objekt som beskrivs av icke-strikta olikheter, $a \leq f \leq b$

- S är begränsad om $S \subseteq B_r(0)$ för något r.

Ex: $y = 3x+4$ är obegränsad
$x^2+y^2=1$ är begränsad

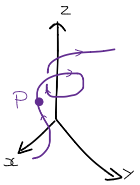
- $P \in \mathbb{R}^n$ är en randpunkt till S om varje omgivning till P innehåller både punkter från S och S^c.

Ex: $x^2+y^2 \leq 1$ har randpunkter i form av cirkeln som innesluter disken.
$x^2+y^2<1$ ———— 〃 ————.

- $P \in \mathbb{R}^n$ är en inre/yttre punkt om P har en omgivning som ligger i S/S^c.

11.1 Vektorfunktioner i en variabel

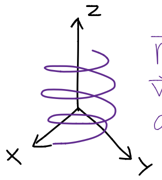
Om vi vill modellera en partikel som rör sig i rummet/planet använder vi en tidsvariabel (t). Vid tidpunkt t befinner sig partikeln sig i $\vec{r}(t) = x(t), y(t), z(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$.



Positionen ges av $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$
Hastigheten ges av $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$
Farten ges av $|\vec{v}|$
Accelerationen ges av $\frac{dr^2}{d^2t} = \vec{a}(t)$

Ex: $\vec{r}(t) = (t,0,0)$ och $\vec{r}(t) = (t^3,0,0)$ beskriver båda en partikel som rör sig längs x-axeln i $\mathbb{R}^3$. Trots detta är detta två olika partiklar ty hastigheten skiljer dem.

Ex: Räkna ut hastighet och accelerationen för $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.



$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$
$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
$a(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$

Notera att $|a(t)| = \sqrt{-\cos^2 t + (-\sin^2 t) + 0} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$ Den rör sig alltså med konstant abs.belopp på accelerationen trots att farten $|\vec{v}(t)| = \sqrt{2}$ är konstant.

Minirepitition

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Skalarprodukt: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \in \mathbb{R}$

Vekterprodukt: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Norm: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Sats

Låt u och v vara deriverbara funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Då gäller:
Om det även gäller att $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är deriverbar:

a) $\frac{d}{dt}(u+v) = u' + v'$

b) $\frac{d}{dt}(\lambda u) = \lambda' u + \lambda u'$

c) $\frac{d}{dt}(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$

d) $\frac{d}{dt}(u \times v) = u' \times v + u \times v'$

e) $\frac{d}{dt}(u(\lambda(t)) = \lambda'(t) u'(\lambda(t))$

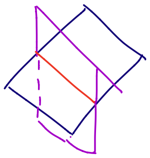
Ex: I exemplet ovan var farten konstant $(|\vec{v}| = \sqrt{2})$. Konstant fart $\Leftrightarrow$ $|r'(t)|$ är konstant. $= \sqrt{r'(t) \cdot r'(t)} \Leftrightarrow$ $r'(t) \cdot r'(t)$ är konstant $\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r'(t) \cdot r'(t)) = 0$

Enligt c) är $\frac{d}{dt}(r'(t) \cdot r'(t)) = r''(t) \cdot r'(t) + r'(t) \cdot r''(t) = 2 r''(t) \cdot r'(t)$.

Slutsats: Farten är alltså konstant omm accelerationen är vinkelrät mot hastigheten.

11.3) Kurvor och Parametrisering

Ex: 2 plan ① $3x + 4y + 5z = 0$
② $4x + 4y + 6z = 0$



Snittet mellan planen: ② - ① $= (4x + 4y + 6z) - (3x + 4y + 5z) =$
$x + z = 0 \Rightarrow x = -z$

Insättning i ① $\leadsto 3x + 4y + 5(-x) = 0 \leadsto y = \frac{1}{2}x$

Låt nu $x = t \rightarrow y = \frac{1}{2}t, z = -t$

Alltså är $r(t) = (t, \frac{1}{2}t, -t)$ en partikel som ritar ut banan som är snittet av planen.

11.3 | Parametrisering av en kurva

Def

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ parametriserar en kurva ℓ i $\mathbb{R}^3$ om $\vec{r}$ exakt täcker upp ℓ. Den får emellertid inte träffa flera gånger.

Ex

$\ell: x^2+y^2=1$, en parametrisering ges av $\vec{r}(t)=(\cos(t),\sin(t))$, $0\leq x\leq 2\pi$ eller $t\in(\pi,3\pi]$

Ex

Något som inte är en parametrisering av samma ℓ är $r(t)=(\cos(t),\sin(t))$ $t\in\mathbb{R}$. Detta eftersom $\vec{r}$ träffar punkter fler än en gång.

Ex

Betrakta snittet av Planet $\pi: \overset{①}{x+y+z=3}$ och den elliptiska cylindern: $\overset{②}{4x^2+y^2=9}$.

② Cylinder med godtyckligt z. Ett uttryck ges av $\left(\frac{3\cos t}{2}, 3\sin t, z\right)$.
① Ger att $z=3-x-y = 3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)$

Alltså ges parametrisering av $\vec{r}(t)=\left(\frac{3}{2}\cos(t), 3\sin(t), 3-\frac{3}{2}\cos(t)-3\sin(t)\right)$ $t\in[0,2\pi)$.

Kurvlängd

En sluten och begränsad kurva ℓ har oftast en längd. $|\ell|$ = längd för en kurva.

Antag att vi har en parametrisering $\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$. Vad är längden mellan a och t?
$S(t)$ = kurvlängden

Alt 1

Vad är $S'(t)$? $\frac{dS}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h}=$ avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$, delat med h. $r(t+h)\overset{\text{litet } h}{\approx} r(t)+v(t)\cdot h$
$\left|\frac{r(t+h)-r(t)}{h}\right|=|v(t)|=|r'(t)|$, $S'(t)=|r'(t)| \Rightarrow S(t)=\int_a^t|r'(t)|dt+C$. Eftersom $S(0)=0\Rightarrow C=0$

Alt 2

Formeln för avstånd mellan $r(t+h)$ och $r(t)$ kommer vara $\sqrt{dx^2+dy^2}\overset{\text{Förläng med dt}}{=}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$
och sedan integrerar vi och får samma resultat.

Specialfall: $y=f(x)$ $\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Längden mellan a och b. Parametrisera a mha $v(x)=(x,f(x))$

Viktigt: Med parametrisering

Ex

Räkna ut längden mellan tiden 1 och e^2 för den parametriserade kurvan $\vec{r}(t)=(t^2,2t,\ln(t))$ enligt formeln: $\int_1^{e^2}\sqrt{(2t)^2+2^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2}\sqrt{4t^2+4+\frac{1}{t^2}}\,dt$

Kvadratkomplettera! $4t^2+4+\frac{1}{t^2}=\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2$

$$\int_1^{e^2}\sqrt{\left(2t+\frac{1}{t}\right)^2}\,dt=\int_1^{e^2}2t+\frac{1}{t}\,dt=\left[t^2+\ln(t)\right]_1^{e^2}=e^4-1+2\ln e=e^4+1$$

12.1 Funktioner i flera variabler & Nivåytor/kurvor

Vi betrakter $f: \overset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ m.m.

Ex

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ger problem om $1-x^2 < 0$ ty det är jobbigt med komplexa tal.

Def

En mängd $U \subseteq \mathbb{R}^n$ är en domän eller definitionsmängd till f om $f: U \to \mathbb{R}$.

I exemplet ovan är Maximala domänen alla x s.a. $1-x^2 \geq 0$, dvs intervallet $[-1,1]$.

Def

En mängd $V \subseteq \mathbb{R}$ är en målmängd om f tar sina värden i V.

Ex

$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$.

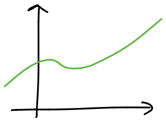
Domän: Alla (x,y) s.a. $x^2+y^2 \neq 0$ dvs $\mathbb{R}^2 \setminus$ origo.

Målmängden: Alla positiva tal $\neq 0$. $\mathbb{R} > 0$

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \text{origo} \to \mathbb{R} > 0$

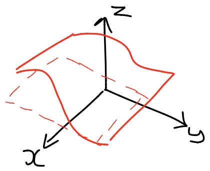
Grafer till funktioner $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$n = 1$: $y = f(x)$



$n = 2$: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ex att f är temp i (x,y)

Vi kan framställa detta grafiskt som $z = \text{temperatur} = f(x,y)$



Om vi har $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hur gör vi då? Ja, det är svårt med 4-dim bilder så vi Skippar att rita dem och använder oss av nivå-yter/kurvor.

Def

Om $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ges nivåytorna till f vid C av alla $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $f(\vec{x}) = C$

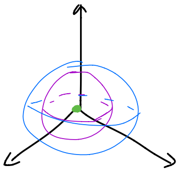
Ex

$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Vad är nivåyterna?

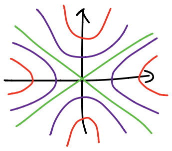
$f(x,y,z) = C$ för $C = 0,1,2$

$C=0$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 0$ dvs $x=y=z=0$ ●
$C=1$, $f(x,y,z) = 1$ dvs sfär med $r=1$ ○
$C=2$ $f(x,y,z) = 2$ — ‖ — $r=\sqrt{2}$ ○



<u>Ex</u>

På en nivåkurva $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$
Nivå $C = 0, 1, 2$



$C=0$: $x^2 - y^2 = 0 = (x-y)(x+y) \Rightarrow x = y$ ●
$C=1$: $x^2 - y^2 = 1$ ●
$C=2$: $x^2 - y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2}$ ●
$x = \pm\sqrt{y^2 + 2}$

12.2 Gränsvärden och Kontinuitet

Detta är den teoretiska bakgrunden till partiella derivator. (Vi kommer förmodligen inte använda dom så mycket...)

Kontinuerlig ≡ Vi kan rita en graf utan att lyfta pennan, intuitivt.

<u>Def</u>

$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}$
Vi säger att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$ om 1) Varje omgivning till (a,b) innehåller element i domän U.
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.a. om $(x,y) \in U$ och $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$
$\Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$

Vi säger också att f är kontinuerlig i (a,b) om $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

De gränsvärden vi betraktar existerar inte, och då får vi visa det, eller kan återföras på ett std-gränsvärde från envariabeln.

<u>Ex</u>

$f(x,y) = \frac{x}{y}$
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ Om gränsv finns så ska åtminstone alla valda linjer, t.ex. (x,kx) eller (kx,x) ha samma gränsvärden vid insättning i f då $x \to 0$.

Testa: $(x,3x)$ $f(x,y) = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$
$(x,2x)$ $f(x,y) = \frac{1}{2}$

Speciellt då $x \to 0$ får vi 2 olika värden så gränsv. existerar ej.

12.2 | Kontinuitet och Gränsvärden

För definitionen av $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \in \mathbb{R}$, se MVA 1.3

Ex Finns $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$?

Testa med väl valda linjer. Test 1: $l_1: (x,0) \Rightarrow f(x,0)=\frac{x\cdot 0}{x^2+0}=0$ $\Rightarrow$ Om gränsvärde finns är det lika med 0.

Test 2: $l_2: (x,x) \Rightarrow f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow$ GV existerar ej

Regler

Låt: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$

Då gäller att: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f}{g}=\frac{L}{M}$, $M\neq 0$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f+g) = L+M$

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f\cdot g) = L\cdot M$

Ex Vad är $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$?

Gränser för $x-y=0$, $x^2-y^2=0$

$x^2-y^2=(x+y)(x-y) \Rightarrow \frac{x-y}{x^2-y^2}=\frac{(x-y)}{(x-y)(x+y)}=\frac{1}{x+y}$ & $\lim_{(x,y)\to(5,5)} \frac{1}{x+y}=\frac{1}{10}$

Ex Variant på exempel $\frac{xy}{x^2+y^2}$

Sätt istället $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$. Finns gv i $(a,0)$? Notera att $x^2\leqslant x^2+y^2$.

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| \leqslant \left|\frac{(x^2+y^2)y}{(x^2+y^2)}\right| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$

Bevis för att gv är 0: Givet $\varepsilon>0$ kan man ta $\delta=\varepsilon$ och då, om
$|(x,y)-(0,0)|=|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2} < \underset{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}}{\delta} \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| < \underset{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}}{\delta}$

Ex Vad är $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$?

Sätt $t=x^2+y^2 \rightsquigarrow \frac{\sin(t)}{t}$ & $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t}=1$

12.3 | Partiella derivator och tangentplan

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)$. Vi vill ha ett mått på hur f ändrar sig i x- och y-riktning.

Def

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

Ex $f(x,y)=3x^2y-\sin(x)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=?$ y-variabeln tolkas som konstant. $\frac{\partial f}{\partial x}=3\cdot 2xy-\cos(x)=6xy-\cos(x)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=?$ x tolkas som en konstant. $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2$

Ex $f(x,y) = x^2 y$

Betrakta nu $f(x^2, xy) = x^4(xy) = x^5 y$

Det finns två sätt att tolka $\frac{\partial f}{\partial x}$. 1) ~~$\frac{\partial}{\partial x}(5xy) = 5x^4 y$~~

2) Sätt $u = x^2$, $v = xy$. $\frac{\partial f}{\partial u}(u^2 v) = 2uv = 2x^2(xy) = 2x^3 y$

Om man använder definitionen som gavs ovan skall $\frac{\partial f}{\partial x}$ bara derivera i första variabeln, dvs den som kallas u.

Istället kan f_1 eller f_x användas för $\frac{\partial f}{\partial x}$ osv.

Man kan fortsätta derivera partiellt

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & f_{11} \\ f_1 \arrow[ur] \arrow[r] & f_{12} \\ f_2 \arrow[r] \arrow[dr] & f_{21} \\ & f_{22} \end{tikzcd}$$

Sammanfattning av 12.4

Alla blandade derivater, dvs $f_{12}, f_{21}, \ldots$, är oberoende av ordning. $f_{112} = f_{121} = f_{211}$

Ex Låt $f(x,y) = e^{kx} \cdot \sin(ky)$ Räkna ut f_{11} & f_{22} visa att $f_{11} + f_{22} = 0$.

$f_{11} = (f_1)_1$

$f_1 = k \cdot e^{kx}(\sin(ky))$, $f_{11} = k^2 e^{kx}(\sin(ky))$

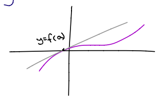
$f_2 = k e^{kx} \cdot \cos(ky)$

$f_{22} = -k^2 e^{kx} \cdot \sin(ky)$

$$\triangle f = \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right) = f_{11} + f_{22} = k^2 e^{kx} \cdot \sin(ky) - k^2 e^{kx} \cdot \sin(ky) = 0$$

Detta är ett exempel på en operator: Laplace-operatorn. (Värmeledningsekvation utan tidsberoende.)

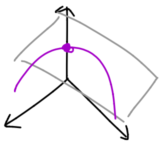
En viktig tillämpning av partiella derivator är tangentplan. En variabel: $y = f(x)$



$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ är tangentlinjens ekvation.

Vi vill modellera tangentplan till funktionsytor/grafer till $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$z = f(x,y)$



En vektor som bestämmer en tangentlinje.

Vi behöver två vektorer som spänner upp planet. I fallet dimension 1, $f'(x) \cdot 1$.

Ta vektorn som pekar åt hur f växer i x-led. Dvs, detta bestäms av $f_1 / \frac{\partial f}{\partial x}$ av

$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $T_1 = (1, 0, f_1)$

y-led: $T_2 = (0, 1, f_2)$

Hur får vi ut tangetplanet från dessa två? Jo, vi tar vektorprodukten mellan T_1 och T_2.

$$T_2 \times T_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & f_1 \end{vmatrix} = (f_1, -(-f_2), -1) = (f_1, f_2, -1) = \vec{n}$$, planet går genom $(a, b, f(a,b)) \Rightarrow$

$f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$ är alltså tangentplanets ekvation

Ex Bestäm tangentplanets ekv $z = f(x,y) = x^2 y - x^4$ punkten $(1,1,0)$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 2xy - 4x^3 \\ f_2 &= x^2 \end{aligned}\right\} \text{då } (x,y) = (1,1) \Rightarrow f_1 = -2, \ f_2 = 1 \Rightarrow \text{Tangentplan: } -2(x-1) + 1(y-1) - (z-0) = 0$$

$y - 2x - z = -1$

Ex $z = Ax + By + C$, Vad är tangentplanet i en punkt $(a, b, Aa + Bb + C)$?
Vi ska få samma plan igen.

$f_1 = A$
$f_2 = B$ i formel: $A(x-a) + B(y-b) - (z - (Aa + Bb + C)) = 0$

$$\Leftrightarrow$$
$$Ax - Aa + By - Bb - z + Aa + Bb + C = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Ax + By + C = z$$

QED

Envariabelfallet är $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$

Ett annat sätt att skriva om tangentlinjens ekvation.

Då borde $\underbrace{f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k}_{\text{Omskrivning av tangentplanets ekvation}}$,

$h = x - a$, $k = y - b$ om (h, k) litet

HL är en linjärapprox till $f(x,y)$ i punkten (a,b).

12.5 Linjära approximationer & Deriverbarhet

Fråga: Hur bra är den linjära approximationen?

Def

linjara approx

$f(x,y)$ är deriverbar i punkten (a,b) om $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(a+h, b+k) - f_1(a,b)h - f_2(a,b)k - f(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Täljaren går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$ => Annat sätt att säga att linj appx är bra.

Sats 4

Om f_1 och f_2 existerar & är kontinuerlig i en omgivning till (a,b) => f är differentierbar i (a,b).

12.5-6 |

Utifrån tangentplan har vi fått s.k. linjära approximationer.

$f(x,y): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Tangentplanet till funktionsytan $z = f(x,y)$ i $(a,b,f(a,b))$ ges av $f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$

Linjäriseringen ges av: $Lf(a+b, h+k) = f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$
$Lf(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$

Deriverbarhet $\Leftrightarrow$ Linj appx är "bra" (små feltermer)

För att gå från den ena formeln till den andra sätts $x = a+h$, $y = b+k$ alternativt $h = x-a$, $k = y-b$.

Sats

f deriverbar om f_1 & f_2 kontinuerliga

Kedjeregel

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\lambda(t))' = f'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$

Vi vill få bra formler för $\frac{\partial}{\partial s} f(u(s,t), v(s,t))$ & $\frac{\partial}{\partial t}(u(s,t), v(s,t))$, $u(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $v(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Typiskt om man vill göra variabelbyte.

Hypotes: $a = b = f(a,b) = 0$
$u(0,0) = v(0,0) = 0$

Vi vill visa att $L(f(u,v)) = Lf \cdot (Lu, Lv)$

$u(s,t) \approx Lu = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot s + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot t$
$v(s,t) \approx Lv = \frac{\partial v}{\partial s} s + \frac{\partial v}{\partial t} t$

(Betraktar jag linjeriseringar map (u,v) & (s,t).

$$f \approx Lf = \frac{\partial f}{\partial s} s + \frac{\partial f}{\partial t} t = \frac{\partial f}{\partial u} u + \frac{\partial f}{\partial v} v \approx \frac{\partial f}{\partial u} Lu + \frac{\partial f}{\partial v} Lv = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial s} s + \frac{\partial u}{\partial t} t\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial s} s + \frac{\partial v}{\partial t} t\right)$$

Jämför två uttryck för Lf.
① $Lf = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) s + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) t$
② $Lf = \frac{\partial f}{\partial s} s + \frac{\partial f}{\partial t} t$

$f \neq Lf$, men om f diff $\Rightarrow$ $f = Lf +$ liten felterm
$u = Lu +$ — " —
$v = Lv +$ — " —

Feltermerna kommer inte spela någon roll för sammansättningen $\Rightarrow$ s-linjära termerna & t-linjära termerna motsvarar varandra.

Formler

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

Ex

Triggettan mha kedjeregeln.

$f(u,v) = u^2 + v^2$, $u = \cos t$, $v = \sin t$ (ingen s-variabel)

$f(\cos t, \sin t) = 1$

Vill visa att deriv i t är 0. $\Rightarrow$ $f(\cos t, \sin t) = $ konst. $f = 1$ m test
g

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2v \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\sin t, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \cos t \end{array}\right\}$ $\frac{\partial f}{\partial t} = 2\cos t(-\sin t) + 2\sin t \cos t = 0$ $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$

Ytterliggare härledning av formeln i linjära fallet:

$$\boxed{\begin{array}{lll} f(u,v)=Au+Bv, & \frac{\partial f}{\partial u}=A & \frac{\partial f}{\partial v}=B \\ u(s,t)=a\cdot s+bt, & \frac{\partial u}{\partial s}=a & \frac{\partial u}{\partial t}=b \\ v(s,t)=cs+dt & \frac{\partial v}{\partial s}=c & \frac{\partial v}{\partial t}=d \end{array}}$$

Vill ha deriv. av sammansättningen: $f(u(s,t),v(s,t))=A(as+bt)+B(cs+dt)=(Aa+Bc)s+(Ab+Bd)t$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial s}=Aa+Bc \\ \frac{\partial f}{\partial t}=Ab+Bd\end{array}\right\}$ Insättning av ◯ bekräftar kedjeregeln.

Låt $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$\lambda:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\lambda(s,t)=(u(s,t),v(s,t))$

$df=\left(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial v}\right)$ vektor $d\lambda=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}$ Kedjeregeln: $d(f\circ\lambda)=df\circ d\lambda$ ← vanliga kedjeregeln

Ex

Beräkna $\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2, x+y)$ & $\frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y^2,x+y)$ i termer av f_1 och f_2.

$F(x,y)=f(\underbrace{x^2+y^2}_{u},\underbrace{x+y}_{v})$

$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1\cdot 2x+f_2\cdot 1$ $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f_1\cdot 2y+f_2\cdot 1$

Tredje gången.....

Kedjeregeln enl. boken i en variabel

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $u=u(t)$, $v=v(t)$, finns inget s.

$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$

"Bevis"

$g(t)=f(u(t),v(t))$

$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{dg}{dt}=\lim_{h\to0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(u(t+h),v(t+h))-f(u(t),v(t))}{h}=\left[\begin{array}{l}\text{lägg till, dra bort} \\ f(u(t),v(t+h)\end{array}\right]=$

inget h-beroende i första variabeln

$\lim_{h\to0}\frac{f(u(t+h),v(t+h)-f(u(t),v(t+h))}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(u(t),v(t+h)-f(u(t),v(t))}{h}$ ⇒ Andra termen är en vanlig sammansätt av 1-var-funktionen ⇒ Vanlig kedjeregel

⇒ Andra termen $=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$

~ Med lite vàlulja första termen $\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}$

Ex

$f(u,v)=u^2v$, $u=\cos(xy)$, $v=e^x$ Vad är $\frac{\partial f}{\partial x}$ & $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2uv(-y(\sin(xy))+u^2\cdot e^x=2\cos(xy)e^x(-y\sin(xy)+\cos^2(xy)e^x$

$\frac{\partial f}{\partial y}=$ P.S.S.

Idén är att linjäriseringarna ger goda approximationer som vi fick från geometri.
Vad betyder de?

$\lambda(s,t)=(u(s,t),v(s,t)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad d\lambda=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t}\\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t}\end{pmatrix}\leftarrow$ Matrisen är en linjär avbildningen mellan tangentplanet som def av olika ytor.

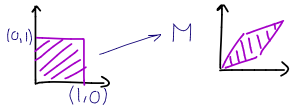
Detta kallas Jacobimatrisen av transformationen $(u(s,t),v(s,t)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Def

$\det|M|=$ Jacobiderminanten, den mäter hur mycket volymen/arean ändras under avbildningen
(Funktionaldeterminanten)

Ex

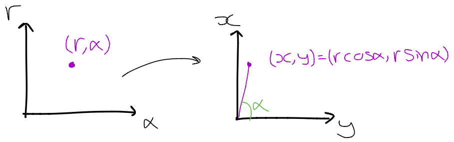
$M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$



$\leftarrow |\det M|=$ volym/area-ändring dvs arean av parallellogram

Ex

$x=r\cos\alpha$
$y=r\sin\alpha$ } Polära koordinater



Jacobi matrisen M och det M?

$$M=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -r\sin\alpha\\ \sin\alpha & r\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\det M=(\cos\alpha\cdot r\cos\alpha-(-r\sin\alpha\cdot\sin\alpha))=r(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=r$$

12.7 Gradienter och Riktningsvektorer

Def

$\nabla f=(f_1,f_2)=$ gradienten till funktionen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

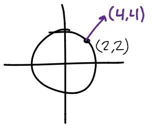
Ex

Jacobimatrisen M för $(u(s,t),v(s,t))$ $\quad M=\begin{pmatrix}\nabla u\\ \nabla v\end{pmatrix}$ $\quad \nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j\right)$

$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j\right)$

Ex

$f(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow \nabla f=(2x,2y)$
i punkten $x=y=2$ kommer $\nabla f(2,2)=(4,4)$



$\nabla f(2,2)$
Notera att vektorn är ortogonal till tangentlinjen till nivåkurvan.
$(2\sqrt{2})^2=x^2+y^2$

Ex

$f(x,y)=5x+3y-7$, gradienten i $(1,1)$

$\nabla f=(5,3) \Rightarrow Z(1,1)=5+3-7=1$

Kurvan $5x+3y=8$ är en nivåkurva till $Z=1$. Vektorn $(5,3)$ är exakt normalen till kurvan.

Sats

$\nabla f(a,b)$ är ortogonal till tangenten till nivåkurvan $z=f(x,y)$ för fixt x,y. $f(a,b)=f(x,y)$
Om $\nabla f(a,b)\neq 0$

Motexempel

relevant nivåkurva

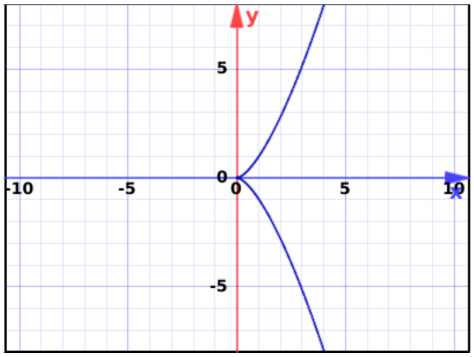
$z = x^3 - y^2$, $(0,0)$ $\Rightarrow \nabla f(3x^2, -2y)$, $z = 0 = x^3 - y^2 \leftarrow$ $\Rightarrow x^3 = y^2$

Blir konstig när man riter....

Kurvan $y^2 = x^3$

Detta är en singularitet,

en s.k. spets.



Bevis

Betrakta $z = c = f(x,y)$. Antag att vi har en parametrisering. $c = f(x(t), y(t)) = \text{konst.}$

$$\frac{dc}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x', y') = 0$$

dot product

tangentvektor/
hastigheten

Kedjeregeln

Tack till den stere komikern för anteekningarna!

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(s,t)$, $v(s,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\lambda(u,v): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Deriverbarhet $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$, P.S.S. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

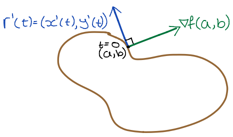
Sats

Om $\nabla f(a,b) \neq 0$ är $\nabla f(a,b)$ ortogonal mot tangenten på nivåkurvan $c = f(a,b) = f(x,y)$

Bevis

Parametrisera nivåkurvan med $r(t) = (x(t), y(t))$, $g(t) = f(x(t), y(t)) = \text{konstant} \Rightarrow \text{derivata} = 0$

Kedjeregeln säger även att $\nabla f(a,b) \cdot \underbrace{(x'(t),\ y'(t))}_{\text{Hastighet/Tangentvektor vid en given tid.}} = \frac{dr}{dt} = 0$



Gradienten kommer hjälpa oss förstå hur f växer (likt derivatan i en-variabel).

Antag att vi har en riktning (u,v), $\sqrt{u^2+v^2}=1$, dvs längd 1. Hur snabbt ökar f i riktningen (u,v) från punkten (a,b)?

$g(t) = f(a+tu, b+tv)$

$g'(t) = [\text{kedjer.}] = \frac{\partial f}{\partial t} = f_1 \frac{\partial(a+tu)}{\partial t} + f_2 \frac{\partial(b+tv)}{\partial t} = f_1 u + f_2 v = (f_1, f_2) \cdot (u,v) = \nabla f(a,b) \cdot (u,v)$

Def

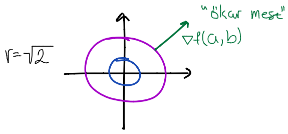
Riktningsderivatan av f i riktningen $\vec{u} = (u,v)$ skrivs som $D_{\vec{u}} f := \nabla f(a,b) \cdot \vec{u}$

$\nabla f(a,b) \cdot \vec{u} = |\nabla f(a,b)| \cdot |\vec{u}| \cos\alpha$, där α är vinkeln mellan vektorerna. Om $\vec{u}$ & $\nabla f(a,b)$ är ortogonala ändras inte f alls $(\cos\alpha = 0) \rightsquigarrow$ dvs $\vec{u}$ är en tangentvektor till nivåkurvan $C = f(a,b) = f(x,y)$

Den riktning där f ökar mest är när $\cos\alpha = 1$, $\vec{u} = \frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$, och den avtar mest när $\cos\alpha = -1$, $\vec{u} = \frac{-\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$.

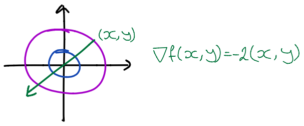
Ex

$Z = x^2 + y^2$, $\nabla f = (2x, 2y)$



Ex

$Z = -x^2 - y^2$, $\nabla f = (-2x, -2y)$



Ortogonalitet

Vad är tangentplanet till nivåytan i $P = (1,1,1)$?

$30x^2 - 4yz - 26 = 0 \leftarrow$ nivåyta

$Z = \frac{30x^2 - 26}{4y} \leftarrow$ funktionsyta

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 60x = 60 \\ f_y &= -4z = -4 \\ f_z &= -4y = -4 \end{aligned}\right\} 60(x-1) - 4(y-1) - 4(z-1) = 0$$

Funktionsytor: $Z = f(x,y)$

Nivåytor: $C = f(x,y,z)$

Funktionsyta ger nivåyta:

Formel för tangentplanet till $g(x,y,z) = 0 = f(x,y) - z$.

Normalen ges av $D_g = (g_1, g_2, g_3) = (f_1, f_2, -1)$

För att komma från funktionsytan till nivåytan

Sätter man $F(x,y,z) = f(x,y) - Z$ och tittar på nivån $F(x,y,z) = 0$.

Ex 8 i 12.7

Hitta en tangentvektor till kurvan som skärs ut av $z=x^2-y^2$, $xyz+30=0$ i $P=(-3,2,5)$.

Parametrisera skärningen, $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ & $r'(t)$. Svårt att para skärningen.
Hitta tangentplan till ytorna & skärningen (egentligen är det två normaler till planet man vill ha) => hitta vekter som är ortogonal mot dessa. N_1 & $N_2 \Rightarrow N_1\times N_2$

$$F=z-x^2+y^2,\quad G=xyz+30,\quad \nabla F=(-2x,2y,1)=(6,4,5)$$
$$\nabla G=(yz,xz,xy)=(10,-15,-6)$$

$$N_1\times N_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -6 & -4 & -1\\ 10 & -15 & -6\end{vmatrix}=-9i-46j+136k$$

12.9 | Taylorutveckling

Taylerutvecklingar i en variabel, om f är $k+1$ ggr deriverbar funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{2!}+f'''(0)\frac{t^3}{3!}+\ldots+f^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}+\underbrace{f^{(k+1)}(0)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}_{\text{felterm}}$$

Vi vill göra något liknande för funktioner i flera variabler.
Antag att vi har en vekter $\vec{u}=(h,k)$. $F(t,h,k)=F(t)=f((a+th),(b+tk))$. $\overbrace{\text{Söker T-utv runt }(a,b)}^{\text{Taylorutveckling}}$.

$$F(t)=F(0)+F'(0)\cdot t+\frac{F''(0)}{2!}+\frac{F'''(0)}{3!}+\ldots$$

Kedjeregeln: $F'(t)=F_1\cdot\frac{\partial(a+th)}{\partial t}+F_2\frac{\partial(b+tk)}{\partial t}=F_1\cdot h+F_2\cdot k=\nabla F\cdot(h,k)=\nabla F\cdot\vec{u}$

Och speciellt om $t=0$: $F'(0)=\nabla F(a,b)\cdot\vec{u}$

Def

Första ordningens T-appx till t i $P=(a,b)$ ges av
$$P_1(a+h,b+k)=(a,b)+f_1(a,b)h+f_2(a,b)k$$
$$P_1(x,y)=f(a,b)+f_1(a,b)(x-a)+f_2(a,b)(y-b)$$

Självklart finns feltermer, $f(x,y)\neq P(x,y)$. För att få bättre approx tar vi högre ordningens T-utv. Om vi sätter $\vec{u}\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)$:
$$F'(t)=(u\cdot\nabla)F(t)$$
$$F^{(n)}(t)=(u\cdot\nabla)^k\cdot F(t)$$

För att få $F''(0)$ så kan vi räkna ut $(u\cdot\nabla)^2=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2=h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Slutsats: $F''(0)=h^2f_{11}(a,b)+2hk\,f_{12}(a,b)+k^2f_{22}(a,b)$

Andra gradens T-appx ges av: $P_2(a+h,b+k)=f(\overset{\text{Punkt}}{a,b})+\overset{\substack{\nabla f(a,b)\cdot(h,k)\\ \text{vekter}}}{f_1(a,b)h+f_2(a,b)k}+\overbrace{\frac{h^2f_{11}(a,b)}{2}+\frac{2hk\,f_{12}(a,b)}{2}+\frac{k^2f_{22}(a,b)}{2}}^{\text{Matris}}$

Hädanefter kommer vi utsättes för 3-dim matriser osv... Varför matriser?

$$[h,k]\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\\ k\end{bmatrix}=h^2f_{11}(a,b)+2hkf_{12}(a,b)+k^2f_{22}(a,b)$$

Matrisen (som bestämmer den kvadratiska formen) kallas Hessianen.

1-var: $f(t)=f(0)+f'(0)t+f''(0)\frac{t^2}{2}+\ldots$

$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\nabla f\cdot(h,k)+[h,k]\cdot\frac{1}{2}\cdot\text{hess}\begin{bmatrix} h\\ k\end{bmatrix}$ Hessianen säger mycket om krökningen/max/min etc.

12.9 T-utv för funktioner $f(x,y):\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1:a ordningens approx $P(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b)$ i (a,b) för $f(x,y)$.
$P_1(a+h, b+k) = f(a,b) + f_1(a,b)h + f_2(a,b)k$

Samma sak som linjeriseringen till f i (a,b). $Lf = R$

Vad kan sägas om $|f-P_1|$? Om $|(x,y)-(a,b)|$ litet så borde/vill man att $|f-P_1|$ litet. Det här är ok om f är differentierbar flera ggr.

f är differentierbar om: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - Lf}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ $f(a+h, b+k) = Lf +$ något som går snabbare mot 0 än $\sqrt{h^2+k^2}$.

Speciellt om $(h,k) \to (0,0)$ så

$$\begin{tikzcd} f(a+h,b+k) \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & P_1(a,b) + \overset{\text{Felterm}}{0} \\ & Lf(a,b) \\ & f(a,b) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = f(a,b)$ dvs f kont (a,b)

Viktigt!

Numeriska approximationer. Hur räknar en dator ut $\sin(0{,}01)$?
T-utv! Uppskatter felet som fås mha medelvärdessatsen.

Desto längre man går desto bättre approximationer. I den här kursen nöjer vi oss med grad 2.

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2$. Ange $P_2(0,0)$

Formel:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) + \tfrac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$$

Vad är $f_1, f_2, \ldots$ $f_1 = 2x$ $f_{11} = 2$ $f_{12} = 0$
$f_2 = 2y$ $f_{22} = 2$

i $(0,0)$: $P_2 = 0 + 0(x-0) + 0(y-0) + \tfrac{1}{2}(2(x-0)^2 + 2\cdot 0(x-0)(y-0) + 2(y-0)^2) = x^2 + y^2$

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy^2$ i $(0,0)$

$f_1 = 2x + 3y^2$ $f_{11} = 2$ $f_{12} = 6y$ i $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f_1 = 0$ $f_{22} = 2$
$f_2 = 2y + 6xy$ $f_{22} = 2 + 6x$ $f_2 = 0$ $f_{12} = 0$ $\Rightarrow$ $P_2 = x^2 + y^2$
$f_{11} = 2$

Samma värden som förra

Ex

$f(x,y) = y^2 - x^3$ $(1,1)$

$f_1 = -3x^2$ $f_{11} = -6x$ $f_{12} = 0$ $\Rightarrow (1,1) \Rightarrow$ $f_1 = -3$ $f_{11} = -6$ $f_{12} = 0$ $\Rightarrow$ Insättning........
$f_2 = 2y$ $f_{22} = 2$ $f_2 = 2$ $f_{22} = 2$

"Kapa av metoden" kan användas om graden överstiger två om man gör en omskrivning.

Ex 2 ovan: $\left.\begin{array}{l} s = x-1 \\ t = y-1 \end{array}\right\}$ $y^2 - x^3 = (t+1)^2 - (s+1)^3 = t^2 + 2t + 4 - (s^3 + 3s^2 + 3s + 1) = 2t - 3s + t^2 - 3s^2 - \cancel{s^3}$ KAPAN $=$

$2(y-1) - 3(x-1) + (y-1)^2 - 3(x-1)^2$

Lär dig Pascals
triangel igen.....

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
OSV

Ex

P_2 för $\sin(x+2y)$ i $(0,0)$

Alt 1: Använd formeln $P_2 =$ Lf + kvadratiskt bss...
Alt 2: Återför på envariabelfall och kapa av.

A2 |

$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} -$ h.o.t.   Sätt in $t = x+2y \Rightarrow \sin(x+2y) = (x+2y) - \underbrace{\cancel{\frac{(x+2y)^3}{3!} + \frac{(x+2y)^5}{5!}}}_{\text{grad} > 2 \, = \, \times} - \ldots\ldots$

$P_2 = (x+2y)$

13.1 | Extremvärdesproblem

I envariabeln hittar man kritiska punkter till en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genom att leta efter $f'(t) = 0$. Sen klassificerar man punkten genom att studera $f''(t)$.

I flera variabler borde f' ersättas med ∇f och f'' med $H(f)$ hessianen.

Def

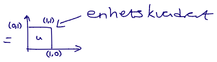
$f(x,y): \; U \to \mathbb{R}$
$U \subseteq \mathbb{R}^2$

(a,b) är ett lokalt max om det för alla (x,y) i en liten omgivning till (a,b) gäller att $f(x,y) \leq f(a,b)$. Ett lokalt min def analogt.

godtycklig

Om vi byter ut lokalt met globalt kräver vi olikheterna för alla (x,y).

Ex

$f(x,y) = x^2 + y^2$, $U =$ 

Max och min lätta: Max: $(1,1)$ med värde 2
Min: $(0,0)$ — " — 0.

$\nabla f = (2x, 2y)$ och $= 0$ om $x = y = 0$.

Men $\nabla f(1,1) \neq (0,0)$
globalt max

Ex

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ med $U =$ enhetskvadraten

P.S.S. Max: $(1,1)$ med värde $\sqrt{2}$.
Min: $(0,0)$ — " — 0.

$\nabla f = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) \neq (0,0)$ i $(1,1)$

$\nabla f(0,0)$: gränsvärdet finns ej då $x,y \to 0,0$
Så $\nabla f(0,0)$ är odef.

Sats

Om $f(x,y)$ har ett lokalt max eller min i (a,b) gäller ett av följande alternativ.

Alt 1: $\nabla f(a,b)$ är odef. (andra ex)
Alt 2: $\nabla f(a,b) = (0,0)$
Alt 3: $\nabla f(a,b)$ är en randpunkt till U. $(a,b) \in \partial U$

Def

U är kompakt om U är sluten och begränsad. (Händer att man skriver K istället för U.)

Sats

Om $U=K$ kompakt så har $f: K \to \mathbb{R}$ alltid ett globalt max och min.

Def

En punkt är kritisk till $f: \underset{U \subseteq \mathbb{R}^2}{U} \to \mathbb{R}$ om $\nabla f(a,b) = 0$.

Vad kan sägas om olika kritiska punkter?
$P_1(x,y)$ i $(a,b) = f(a,b) + \underbrace{\cancel{\nabla f(a,b)}}_{=0} \cdot (x-a, y-b) = f(a,b)$ ty kritisk punkt

Vad är $f(x,y) - P_1(x,y)$?
En felterm som är kvadratisk (medelvärdessats)

Vad är istället $f(x,y) - P_2(x,y)$
En kubisk felterm.

$$f(x,y) \approx P_2(x,y) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}\left(f_{11}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{12}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{22}(a,b)(y-b)^2\right)$$

$$P_2(a+h, b+k) = f(a,b) + \frac{1}{2}[h,k] \cdot H(f) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Ser ut som att Hessian bestämmer hur f uppför sig runt (a,b) (P_2).

Vad kan vi säga om uttryck på den hör formen?

$[h,k]\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$? Linalgen säger att vi kan diagonalisera $H(f) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Nya kvadratiska uttrycket blir $\lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2$. Om $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ kommer $H(f) > 0$ om $(h,k) \neq (0,0)$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ $H(f) < 0$ — " —
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ eller $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ $H(f) > 0$ eller $H(f) < 0$
$\lambda_1 = 0$ eller $\lambda_2 = 0$ $H(f) = 0$, kanske trots att — " —

Kvadratisk form

$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ är
pos def: $f(x,y) > 0$ om $(x,y) \neq (0,0)$
neg def $f(x,y) < 0$ — " —
indefinit $f(x,y) \underset{<0}{\geq 0}$ ibland det ena, ibland det andra.

Kan användas för att ge oss en uppfattning av hur grafen till f ser ut i närheten av en kritisk punkt.

Test: $f_{11}(a,b)=A$, $f_{12}(a,b)=B$, $f_{22}(a,b)=C$

* $B^2-AC<0,\ A>0$	Pos def
* $B^2-AC<0,\ A<0$	neg def
* $B^2-AC>0$	indefenit
* $B^2-AC=0$	varken eller

Kritisk Punkt (a,b)

$Df(a,b)=0$

∝ lokalt max ~	$H(f)$ neg def
∝ lokalt min	$H(f)$ Pos def
∝ Sadelpunkt	$H(f)$ indefenit
∝ Ger $H(f)$ ingen info	varken eller

↑ Kallas dock sadelpunkt i boken.

13.1 Extremvärdesproblem & lokala karaktäriseringar av kritiska punkter

Vill studera lokalt beteende för kritiska punkter till funktioner $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eller $f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Kr pkt: $\nabla f(a,b) = 0$

(a,b) s.a.

Vi vill veta när dessa pkter är lokala max, min eller inget av detta. Varken eller kallas i boken för sadelpunkt. Genom taylorPolynom!

$f(x,y) \approx P_2(x,y)$ i punkten (a,b).

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \underbrace{\cancel{\nabla f(a,b)(x-a)(y-b)}}_{=0 \text{ ty kritisk p}} + \frac{1}{2}\left[(x-a)(y-b)\right] \cdot H(f)(a,b) \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

P_2 är kontrollerad av $H(f)$. Förra gången talade vi om pos.def, neg.def, indefinita, matriser eller kvadratiska ytor.

Kvadratisk form: $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$

Om $f(x,y) > 0$ för $(x,y) \neq 0 \Rightarrow P_2(x,y) = f(a,b) + \overset{\text{Plus ngt} >0}{\cdot} > 0$

om $(x,y) \neq (a,b)$

i det här fallet är (a,b) lokalt min

$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$

dela med y^2 (som är >0)

$f(x,y) = A\frac{x^2}{y^2} + 2B\frac{x}{y} + C$

sätt $\frac{x}{y} = t$

$f(t) = At^2 + 2Bt + C$

- Hitta minpunkter för att se om $f >/< 0$
- $f(t)$ har inga reella nollställen om alltid pos eller alltid negativ $\Rightarrow$ leta nollställen

$f(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{2A} \Rightarrow$ Om $B^2 - AC < 0$ existerar inga nollställen.

$B^2 - AC < 0$ & $A > 0 \Rightarrow F(t)$ alltid pos
$B^2 - AC < 0$ & $A < 0 \Rightarrow F(t)$ alltid neg
Om $B^2 - AC > 0 \Rightarrow$ $F(t)$ ibland pos ibland neg
$B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ Vi vet inget

Översättning till kritiska punkter $A = f_{11}(a,b)$, $B = f_{12}(a,b)$ $C = f_{22}(a,b)$.

$B^2 - AC < 0$	$A > 0$	lokalt min
$B^2 - AC < 0$	$A < 0$	lokalt max
$B^2 - AC > 0$		Sadelpunkt (riktig)
$B^2 - AC = 0$		ingen info

Notera: $B^2 - AC = -\det(H(f))$

Ex Bestäm och klassificera kritiska punkter till $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

Kr. Pkt: $\nabla f(x,y)=0$

$$\nabla f(x,y)=(3x^2-3y,3y^2-3x)=(0,0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y=x^2 \\ x=y^2 \end{matrix}\right\} y=x^2=(y^2)^2=y^4 \Rightarrow y^4=y \Rightarrow y(y^3-1)=0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1=0, \; y_2=1 \\ x_1=0, \; x_2=1 \end{matrix}}$$

Kr. Pktr

Hitta partiella derivater! Klassificera. $P_1=(0,0)$ $P_2=(1,1)$

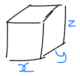
$$\text{Hess}(f)=\begin{pmatrix} \overset{A}{6x} & \overset{B}{-3} \\ \underset{B}{-3} & \underset{C}{6y} \end{pmatrix} \quad \text{om } P_1=(0,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=0,\ B=-3,\ C=0 \Rightarrow B^2-AC=9>0$$

P_1 är alltså en sadelpunkt.

$$\text{Hess}(f) \text{ om } P_2=(1,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A=6, B=-3, C=6 \Rightarrow B^2-AC=-27<0 \Rightarrow P_2 \text{ är lokalt min.}$$

Dugga 26/9, V&V, $8^{30}-11^{30}$ Inkluderar allt till och med Lagranges metod (13.3).

Ex Bestäm största och minsta area till en box med given volym 5ve.



Om vi trycker ihop lådan => oändlig area...

$V=x\cdot y\cdot z=5$

$A=2xz+2yz+2xy$

Volymformeln $\Rightarrow z=\frac{5}{xy}$

Arean $=f(x,y)=2x\left(\frac{5}{xy}\right)+2y\left(\frac{5}{xy}\right)+2xy = \frac{10}{y}+\frac{10}{x}+2xy$

$f(x,y)=\frac{10}{y}+\frac{10}{x}+2xy$

Minimum ges av en kritisk punkt.

$$\nabla f=\left(\frac{-10}{x^2}+2y, \frac{-10}{y^2}+2x\right)=(0,0) \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{5}{x^2} \\ x=\frac{5}{y^2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y=\frac{5}{\left(\frac{5}{y^2}\right)^2}=\frac{y^4}{5} \\ x=\frac{x^4}{5} \end{matrix}$$

$\Rightarrow \cancel{x_1=0}$ men $x_1>0$

$x_2^3=5 \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{5}$

$y_2=\sqrt[3]{5}$

$z=\frac{5}{xy}=\sqrt[3]{5}$

13.2 Extremproblem med Bi-villkor

Ofta behöver man lägga till bivillkor. Hur max-/minimerar vi en funktion $f(x,y)$ över ett område U definierat via

$g(x,y)=C$

$g(x,y)\geq C$

$g(x,y)\leq C$

Sats

Om f har lokalt min/max i (a,b) gäller

i) $\nabla f(a,b)=0$

ii) $(a,b)=$ randpunkt

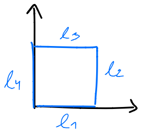
iii) ∇f odef

Ex Hitta max/min till $f(x,y)=x^2+y^2$ på kvadraten med hörn $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$

$\nabla f=(2x,2y)=(0,0) \rightsquigarrow x=y=0$ motsvarar en kritisk punkt.

Spara $f(0,0)=0$

Måste kolla värden på randen till kvadraten. Detta genom att parametrisera kvadraton.



Finns 4 sidor som behöver fixas....

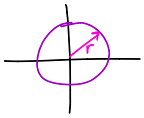
ℓ_3 kan parametriseres gm $\ell_3(t)=(t,1)$

För att kolla värden till $f(x,y)$ sätt in ℓ_3. $g(t)=f(\ell_3(t))=t^2+1^2$ Kolla kritiska punkter och randen.

$g'(t)=2t \Rightarrow t=0$ motsvarar $(0,1)$. Värde: Sparar $f(0,1)=1$
Randerna: $(0,0)$ & $(1,1)$ Spara också $f(1,1)=2$
Övriga linjer lämnas till läsaren att visa.

I slutänden har vi sparat massor med tal. Hittills har vi: $f(0,0)=0$ min ges av minsta värdet
$f(0,1)=1$ max ges av största
$f(1,1)=2$
⋮

Ex Hitta max/min till $f(x,y)=ax+by$ på disken av radie r: $x^2+y^2\leqslant r$



Kritiska punkter: $\nabla f=(a,b)$
Om $(a,b)\neq(0,0)$ finns ingen kritisk punkt
Alltså ligger max eller min på randen: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow$ $x=r\cdot\cos t$
$y=r\cdot\sin t$

$f(x,y)=f(x,y \text{ på randen})(t)=a\cdot r\cdot\cos t+b\cdot r\cdot\sin t$

$g(t)=ar\cos t+br\sin t$
$g'(t)=-ar\sin t+br\cos t=0$

$-a\cancel{r}\sin t+b\cancel{r}\cos t=0$
$(a,b)\cdot(-\sin t,\cos t)=0 \Leftrightarrow$ vinkelräta

En annan vinkelrät vekter till (a,b) är $(-b,a)$
det innebär att: $(-\sin t,\cos t)=\lambda(-b,a)$
$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ eftesom VL har längd 1

Sammansättening av detta ger att $|(a,b)\cdot(x,y)|\leqslant\|(a,b)\|\cdot\|(x,y)\|$
Cauchy-Schwartz olikhet

13.2 Ext-vårdesproblem med bi-/randvillkor

Hitta max och min till $f(x,y) = ax+by$ på disken $x^2+y^2 \leq r^2$ $(a,b) \neq (0,0)$

$\nabla f = (a,b) \neq (0,0) \Rightarrow$ <u>max</u> & <u>min</u> är en randpunkt & finns eftersom disken är kompakt.

Parametrisera randen $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{matrix}\right\} g(t) = f(r\cos t, r\sin t) = ar\cos t + br\sin t$

annan vektor ortogonal till (a,b)

$$g'(t) = ar(-\sin t) + br\cos t = 0$$
$$= (-r\sin t, r\cos t)\cdot(a,b) = 0 \Rightarrow (a,b) \perp (-r\sin t, r\cos t) \Rightarrow (-r\sin t, r\cos t) = \lambda(-b,a)$$

Vad är λ?

Kan abs-belopp/norm på båda sidorna: $\left(\overbrace{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}^{=r}\right)^{1/2} = |\lambda|\cdot|\left((-b)^2+(a)^2\right)^{1/2} \Rightarrow |\lambda| = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \Rightarrow$

$$\lambda_{\pm} = \pm\frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

maxpunkt

$(-r\sin t, r\cos t) = \lambda_{\pm}(-b,a) \Rightarrow$ plusfallet: $-r\sin t = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}} - b$ m.a.o: $(x,y) = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)$

$x = r\cos t = \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}\cdot a$

$y = r\sin t = \frac{r}{(a+b)^2}\cdot b$

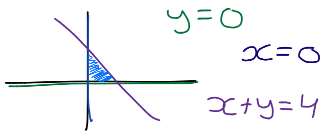
Minusfallet: $\lambda_- = \frac{-r}{(a^2+b^2)^{1/2}} \Rightarrow$ min: $(x,y) = \frac{-r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)$

Slutsats: $-r(a^2+b^2)^{1/2} \leq ax+by \leq \frac{r}{(a^2+b^2)^{1/2}}(a,b)\cdot(a,b) = r(a^2+b^2)^{1/2}$

Kallas: Cauchy-Schwarz olikhet $|(a,b)\cdot(x,y)| \leq \|(a,b)\|\cdot\|(x,y\| \leq \|(a,b)\|\cdot r$

<u>**Ex**</u> Hitta max/min till $f(x,y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ på området begränsat av $x=0, y=0, x+4=4$.

3 linjer



Vi vet att området är kompakt => max/min finns.
Kolla kandidater på randen och i det inre.

$\nabla f = (f_1, f_2) = (0,0)$ $e^{-(x+y)} \neq 0$

$f_1 = (xy(2-x)\cancel{e^{-(x+y)}}) = 0$

$f_2 = x^2(1-y)\cancel{e^{-(x+y)}} = 0$

$xy(2-x) = 0$ Alt 1: $x=2, y=1$

$x^2(1-y) = 0$ Alt 2: $x=0$, y = valfritt på randen

Bokför $(2,1)$: $\Rightarrow f(2,1) = 4\cdot e^{-3}$

Kolla ränder: $x=0$ rand1 $\quad f(0,y)=0$
$y=0$ rand2 $\Rightarrow f(x,0)=0$ } Bokför 0.
<u>$x+y=4$ rand3</u>

Testa rand3 genom att sätta in $y=4-x$ & $x\geq 0, y\geq 0$

Insättning: $f(x,y) = x^2(4-x)e^{-4} = g(x)$

Kolla <u>rand</u> och leta $g'(x)=0$. $\quad g'(x) = (8x-3x^2)e^{-4} = 0 \Rightarrow x=0$ eller $x=\frac{8}{3}$
inget nytt

$x=\frac{8}{3} \Rightarrow y=\frac{4}{3}$: $(8/3, 4/3)$

Potentiellt max/min: $f(\frac{8}{3},\frac{4}{3}) = \frac{256}{27}\cdot e^{-4}$

Sparat i Bank: $0, \frac{256}{27}\cdot e^{-4}, 4e^{-3}$

0 är min. $4e^{-3}$ är max genom uppskattning.

13.3 | Lagranges Metod

Frågeställning: Hur maximerar/minimerar jag en $f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ på ett område bestämt av $g(x,y)=0$

$=C$ (nivåyta)

Tänk att vi parametriserar nivåkurvan $g(x,y)=C$ med hjälp av $x=x(t)$, $y=y(t)$. Vill max/minimera $h(t)=f(x,y)=f(x(t),y(t))$

Hitta kritiska punkter till $h(t)$. $h'(t)=\frac{d}{dt}(h(t))=\frac{d}{dt}(f(x(t),y(t))=\{\text{Kedje}\}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=$
$\nabla f \cdot (x',y)=0$

∇f ortogonal till (x',y') tangentvektor till nivåytan $g(x,y)=c$

Normalen till tangentlinjen är också ortogonal till (x',y'). $\nabla g(x,y)$ i (a,b) är normal till tangentlinjen till nivåkurvan $g(x,y)=g(a,b)=C$.

$\nabla f(a,b)=\lambda_0 \nabla g(a,b)$ om (a,b) motsvarar en kritiskpunkt till $h(t)$.
Detta gäller om $(x',y')\neq 0 \Leftrightarrow \nabla g \neq 0$

Sats

Antag att $f(x,y)$ har lokalt max/min på $g(x,y)=C$ i punkten (a,b) och att (a,b) ej är ändpunkt, $\nabla g(a,b)\neq(0,0)$. Då finns λ_0 så (a,b,λ_0) är en kritisk punkt till funktionen
$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$

Om (a,b,λ) kritisk pkt till C: $\nabla L=\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y},\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)=(0,0,0)$
$\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y}\right)=(0,0) \Leftrightarrow \nabla f+\lambda\nabla g=0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \Leftrightarrow g=0$

Ex Hitta kortaste avståndet mellan origo och kurvan som ges av $x^4y=16$.
Lagranges metod: Avståndet mellan en punkt (x,y) på $x^4y=16$ och origo: $f=(x^2+y^2)^{1/2}$
Bivillkor: $g(x,y)=x^4y=16$
Skriv om: $g(x,y)=x^4y-16=0$

Vi söker kr.Pkt till $L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)^{1/2}+\lambda(x^4y-16)$

Trick: Om $(x^2+y^2)^{1/2}$ minst på en mängd D $\Leftrightarrow$ x^2+y^2 minst på en mängd D.
Istället: $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^4y-16)$

Kr.Pkt: $\nabla L=(0,0,0)$
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda 4x^3y=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda x^4=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^4-16=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=-\frac{2x}{4x^3y}=\frac{-1}{2x^2y}\\ \lambda=-\frac{2y}{x^4}\end{matrix}$$

Här använder jag att $x\neq 0$ efters ekv 3 kräver det, så byt ut $\sqrt{x^2+y^2}$ mot x^2+y^2 i Lagranges.

$\frac{-1}{2x^2y}=\frac{-2y}{x^4} \Leftrightarrow x^2=4y^2 \Rightarrow x=\pm 2y$

Insättning i ekv 3 $\Rightarrow$ $x^4y=16$, $x=\pm 2y \Rightarrow 2^4y^5=16 \Rightarrow y^5=1 \Rightarrow y=1$

Lagrange föreslår: $(-2,1)$ eller $(2,1)$ är max/min till avståndet i origo. Det måste också vara min, som då ges av: $\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

Minikomplettering

- Deriverbar och differentierbar är samma sak.
- Kurvor
  - ℓ är en kurva i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Vi säger att kurvan är sluten om man kommer tillbaka till starten när vi går runt den.
  - ℓ är enkel om den inte skär sig själv.

  Sats i topologi (Jordans kurvsats)

  Om kurvan ℓ är enkel och sluten i $\mathbb{R}^2$ kan man dela upp $\mathbb{R}^2$ i två delar (inre/yttre).
  - Längden till en kurva kallas också båglängden. Om längd$(t)=\int_a^t ds$ och $ds=((rx)^2+(ry)^2)^{1/2}dt$ för en param av kurvan $r(t)=x(t),y(t)$.
- Gradienter

  Ökningen för en funktion $f(x,y)$ i riktningen $\vec{u}$ ← enhetsvektor! ges av $D_u f(a,b)=\nabla f(a,b)\cdot\vec{u}$.
  Det räcker med att ha koll på riktningarna $(1,0)$ & $(0,1)$ för att få koll på alla riktningar, om f differentierbar.

- Tangentplan

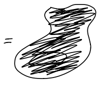
  Funktionsyta: $z=f(x,y) \Rightarrow f_1(x-a)+f_2(y-b)-(z-f(a,b))=0$

  Nivåyta: $f(x,y,z)=C \Rightarrow \nabla f(a,b,c)\cdot(x-a,\,y-b,\,z-c)=0$

  En funktionsyta bestämmer en nivåyta genom
  $z=f(x,y) \rightsquigarrow F(x,y,z)=f(x,y)-z=0$

14.1 Dubbelintegraler

Om $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ symboliserar $\int_a^b f(x)dx$ en viktad area. Specialfall: Om $f=1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=b-a=$ längden mellan b och a.

I flera variabler... $\iint_R f(x,y)\,dA$, $R=$  ett område i $\mathbb{R}^2$.

Dette betyder att man borde få integrering två ggr, dvs volym. Specialfallet $f=1$ ger istället för längden nu arean av R.

$$\iint_R f(x,y)\underset{\nwarrow}{dA} := \text{den viktade volymen till området "ovanför" } R \text{ och under grafen till funktionen.}$$

areaelement (jmf dx som är ett längdelement)

Hur definierar vi detta?

En dator skulle dela upp området R i rektanglar och ta ett tal/vektor i rektangeln och sedan ta ett element från rektangeln. Om rektangeln $:=R_{ij}$, elementet $=P_{ij} \Rightarrow$

$$\iint f\,dA=\sum f(P_{ij})\cdot\text{arean}(R_{ij}) + \sum \text{Höjden}_{ij}\cdot\text{Basen}_{ij}$$

Def

$\iint_R f\,dA=I$ om $\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0$ s.a. $\left|\sum_{i,j} f(P_{ij})\,\text{Area}(R_{ij})-I\right|<\varepsilon$ om största arean till rektanglarna $R_{ij}<\delta$.

Säger att om rektanglarna blir mindre så närmar sig vår approximation ett värde.

Ex Inte Riemann-integrerbart.

Låt R vara en enhetskvadrat och $f(x,y)=\begin{cases}1, & x \,\&\, y\in\mathbb{Q}\\ 0, & x \,\&\, y\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Eftersom P_{ij} är godtycklig i varje rektangel kan vi välja P_{ij} är 1 eller 0.

$$\left.\begin{aligned}&\text{Om } P_{ij}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \iint_R f\,dA=1\\ &\quad P_{ij}\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \iint_R f\,dA=0\end{aligned}\right\}\text{ Ej samma, ty ej samma!}$$

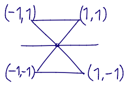
Sats

Om f är kontinuerlig i R och R är kompakt samt att R har en rand beståendes av kurvor med ändlig längd existerar $\iint_R f\,dA$.

Några egenskaper för $\iint_R f\,dA = I$

$\underbrace{f \leq 0 \Rightarrow \iint_R f\,dA \leq 0}$

- $I = 0$ om R har area 0.
- Om $f \geq 0$ är $\iint_R f\,dA \geq 0$, det omvända gäller och båda ger volymen till grafen.
- Linjär. Om $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt kontinuerliga $\Rightarrow \iint_R (af+bg)\,dA = a\iint_R f\,dA + b\iint_R g\,dA$
- Olikheter bevaras
- Triangelolikheten gäller. $\left|\iint_R f\,dA\right| \leq \iint_R |f|\,dA$
- $R = \cup D_i$, olika D_i skär inte varandra. $\iint_R f\,dA = \sum \iint_{D_i} f\,dA$

Ex $f(x,y) = x^3 - 1$, $R =$ 

$D_1 = -D_2$

$$\iint_R (x^3-1)\,dA = [\text{linjär}] = \iint_R x^3\,dA - \underbrace{\iint_R 1\,dA}_{=2} = \iint_{D_1} x^3\,dA + \iint_{D_2} x^3\,dA - 2 = \cancel{\iint_{-D_2} f\,dA} + \cancel{\iint_{D_2} f\,dA} - 2 = -2$$

14.2| Upprepade enkelintegraler i x- & y-koordinater

Alla dubbelintegraler reduceras till enkel integraler.

Sats (Fubinis sats)

Om vi har ett område R (R (kompakt) snäll) och f är en funktion på $R \subseteq \mathbb{R}^2$ & $\iint_R |f| dA < \infty$

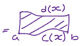
Då kan man dela upp integralen i 2 enkelintegraler. $\iint_R f dA = \int(\int f dx)dy = \int(\int f dy)dx$

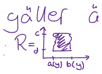
Ex Låt R vara enhetskvadraten, $f = xy$

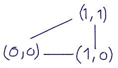
$\iint_R f\, dA = \iint_R xy\, dA = \int_0^1(\int_0^1 xy\, dx)dy$

Beräkna först den inre: $\int_0^1 xy\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot y \Big|_0^1 = \frac{y}{2}$, och sen den yttre: $\int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$

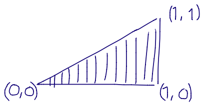
Sats

Om fubinis sats gäller är integralen över ett område: R =  , $\iint_R f dA = \int_a^b dy \int_{c(x)}^{d(x)} f dx$.

På samma sätt: R =  $\iint_R f\, dA = \int_d^c \int_{ay}^{by} f\, dx dy$. Man slicar i olika riktningar.

Ex Integrera $f = xy$ över triangeln 

Vi slicar i x-led och vill använda formeln



$x = 0, \quad x = 1$

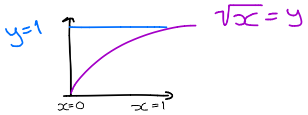
$\downarrow \qquad \downarrow$

$a = 0 \quad b = 1$

$\iint_R f dA = \int_0^1(\int_0^x xy\, dy)dx \Rightarrow \int_0^x xy\, dy = \frac{xy^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^3}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{x^4}{2 \cdot 4}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$

Ex Beräkna $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{(y^3)} dy$

Först söker vi en primitiv till $e^{(y^3)}$ men det går inte på ett rimligt sätt. Problemet är att vi integrerar i fel ordning. Försök istället att förstå området och gör en y-slicing istället för x-slicing.



Hur slicar vi i y-led?

y mellan 0 & 1 $\Rightarrow \int_0^1$

För fixt y, mellan vilka x-värden ligger R? $0 \to y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

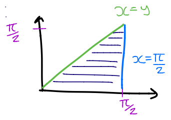
$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{(y^3)} dx \Rightarrow \int_0^{y^2} e^{(y^3)} dx = [e^{(y^3)} \text{ konstant}] = x \cdot e^{(y^3)}\Big|_0^{y^2} = y^2 e^{(y^3)} \Rightarrow \int_0^1 y^2 e^{(y^3)} dy = [u = y^3, du = 3y^2 dy] =$

$\int_0^1 e^u \cdot \frac{du}{3} = \frac{(e-1)}{3}$

Ex Beräkna $\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Vi stöter på problem då det är "omöjligt" att beräkna $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Område R:



$0 \leqslant y \leqslant \pi/2$

$y \leqslant x \leqslant \pi/2$

Om vi slicar i x-led

$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Fixt x i y mellan 0 & x

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \frac{\sin(x)}{x} dy dx = \int_0^{\pi/2} [\frac{\sin(x)}{x} \cdot y]_0^x dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = 0 - (-\cos(0)) = 1$

14.3| Generaliserade integraler och m-värdessatsen

Medelvärdessatsen: Om R är integrerbar, kompakt med ändlig rand och f kontinuerlig.

$\exists(x_0, y_0) \in R$ s.a. $f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}(R)} \iint_R f\, dA$.

Bevis

Eftersom R kompakt, har ändlig rand, och f kontinuerlig $\Rightarrow \iint_R f\, dA$ existerar

$\Rightarrow$ f har globalt max/min

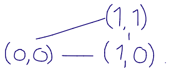
Globalt max/min $\Rightarrow \forall (x,y) \in R \quad f(x_{min}, y_{min}) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x_{max}, y_{max})$

Integrera allt: $\underbrace{\iint_R f_{min}\, dA}_{} \leq \iint_R f\, dA \leq \iint_R f_{max}\, dA$

$$f_{min} \cdot \iint_R 1\, dA \leq \iint_R f\, dA \leq f_{max} \iint_R 1 \cdot dA \Rightarrow f_{min} \leq \frac{1}{area} \cdot \iint_R f\, dA \leq f_{max}$$

Pga kontinuitet antas alla värden mellan f_{min} & f_{max}.

Ex Bestäm medelvärde till funktion $f(x,y) = x$ på triangeln



Vi behöver göra 2 saker: 1) Räkna ut arean.
2) Räkna ut $\iint_R x\, dA$

1) $A = B \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2) $\int_0^1 \int_0^x x\, dy\, dx = \left[\int_0^x x\, dy = xy \Big|_0^x = x^2\right] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Medelvärde: $\frac{\iint_R x\, dA}{\iint_R dA} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$

Ex Medelvärde till x^2+y^2 över samma triangel.

$\int_0^1 \int_0^x (x^2+y^2)\, dy\, dx = \left[\int_0^x (x^2+y^2)\, dy = x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^x = \frac{4}{3} x^3\right] = \int_0^1 \frac{4x^3}{3} dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

Medelvärdet: $\frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$

Mer generaliserade integraler

Envariabel hade typ samma satser som de vi talat om rörande integrering. Dvs $\iint_{komp} f_{kont}\, dA$ finns.
Vi integrerade dock bara över kompakta, slutna, interval eller punkter, men även t.ex $\mathbb{R}$.

Ex $\int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 0 - (-e^{-0}) = 1$

Vi vill också integrera över större områden:

Ex Integrera e^{-x^2} över området som är begränsat av $y = x$, $x \geq 0$ och $y = -x$.

$\int_0^\infty dx \int_{-x}^{x} e^{-x^2} dy = \int_0^\infty [e^{-x^2}(x-(-x))]\, dx = \int_0^\infty 2x e^{-x^2} dx = [\underset{\text{gränserna blir samma}}{u = x^2,\ du = 2x\,dx}] = \int_0^\infty e^{-u} du = 1$

Ex från 14.2

$\int_0^1\int_0^1 (x+y)e^{xy}\,dxdy =$

$\int_0^1\int_0^1 xe^{xy}\,dxdy + \int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dxdy = e-2+e-2 = 2e-4$, eftersom

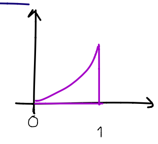
$\int_0^1\int_0^1 ye^{xy}\,dxdy = \int_0^1 \left[y\cdot e^{xy}\cdot\frac{1}{y}\right]_0^1 dy = \int_0^1 e^y-1\,dx = \left[e^y-y\right]_0^1 = e-1-(1-0) = e-2$

$\int_0^1\int_0^1 xe^{xy}\,dydx = \{$På samma sätt$\} = e-2$

14.3 Generaliserade integraler

$\iint_R f\,dA$ är riemannintegrerbara om R är kompakt & f kontinuerlig. Om f diskont eller ej def i hela R eller R ej kompakt (obegränsad) blir det inte så bra.

Ex



$y=x^2$
$y=0$

$f(x,y)=\frac{1}{(x+y)^2}$

Om $x=y=0 \Rightarrow 0$ i nämnaren...

Vi kan dock integrera. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{(x+y)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\ln(x+1)\right]_0^1 = \ln 2-\ln(1)=\ln(2)$

Detta är ett exempel på en generaliserad integral, en integral över antingen ett ej kompakt område eller en funktion som inte är definierad överallt.

14.4 Polära koordinater

Envariabelfallet: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad\int_a^b f(x)\,dx$, ofta vill man byta ut variabler/koordinater.

$x=g(u) \Rightarrow dx=g'(u)du$. Vi får då nya gränser och: $\int f(g(u))\cdot g'(u)du$ ← extra faktor

Flervariabel är svårare...

Ex Singla slant n ggr. För varje krona +1, klave -1. Varje utfall markeras i ett diagram. Vi förväntar oss ett normaldistribuerat utfall runt noll. Om $n\to\infty$ kommer kurvan likna e^{-x^2}.

Vi vill tänka på e^{-x^2} som någon form av sannolikhetsfördelning borde $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=1$, men så blir det inte. Det blir en konstant C. Vi vill dela e^{-x^2} med C för att få en sannolikhetsfördelning.

$C=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$

Istället för C räknar vi ut C^2. $\quad C^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy=$

Integranden beror bara på x^2+y^2, sätt $r^2=x^2+y^2 \Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \iint_{R^2} e^{-r}dxdy$

r=radien på en cirkel. Om vi vill kunna täcka alla punkter i $\mathbb{R}^2$ måste vi täcka alla punkter med en given area.

Som dubbelintegral: $\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}dxdy \Rightarrow \left[dxdy=r\cdot drd\theta\right] \Rightarrow \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{\infty} 2\pi\cdot e^{-r^2}dr = \left[\begin{smallmatrix}u=r^2\\ du=2rdr\end{smallmatrix}\right] =$
$2\pi\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{2}du = \pi\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi$

$$\left.\begin{aligned}C&=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\\ C^2&=\pi\end{aligned}\right\}\ C=\pm\sqrt{\pi},\quad C>0 \Rightarrow C=\sqrt{\pi}$$

Teori

$\iint_R f\,dxdy$, vill göra ett variabelbyte: $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$. $g(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$

Kedieregeln: $\frac{\partial g}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial g}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

Hur mycket ändrar sig x om vi ändrar s & t?

$$\left.\begin{aligned}dx&=\frac{\partial x}{\partial s}ds+\frac{\partial x}{\partial t}dt\\ dy&=\frac{\partial y}{\partial s}ds+\frac{\partial y}{\partial t}dt\end{aligned}\right\}\ [dx,dy]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ds\\ dt\end{bmatrix}$$

$dxdy=|\det(\text{Jacobianen})|\,dsdt$

14.4|

Vid variabelsubstitution eller koordinatbyte: $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ så ändras areaelementet $dxdy = dA = \_\, dsdt$

$[dx, dy]$ = Jacobianmatrisen $\begin{bmatrix} ds \\ dt \end{bmatrix}$

Speciellt: $\iint_R f dxdy = \iint_S f \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} dsdt$ om S = bilden av R.

Sats

Låt $D \to C$ vara ett variabelbyte där funktionerna har kont. partiella derivator & antag att f är integrerbar på C. Då gäller att $\iint_C f dxdy = \iint_S g(s,t) \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} dsdt$ där $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$

Speciellt: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{1}{\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}}$

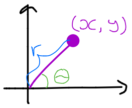
Vad menar Dener med variabelbyte?

$D \to C$ är en bijektiv funktion.

$(s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t))$

Polära koordinater: $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$ $\quad r \in [0,\infty)$

$y = y(r,\theta) = r\sin\theta$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$



Ex Vad är Jacobianmatrisen & dess det för detta var. byte?

$Jac = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla x \\ \nabla y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$

$det(Jac) = \cos\theta \cdot r\cos\theta - r\sin\theta \cdot \sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$

dvs $dxdy = r dr d\theta$

Dener använde detta för att räkna ut sannolikhetsexemplet på föregående föreläsning. Man vill använda detta om man vill integrera över cirkelaktiga områden att när integranden beror på $r = \sqrt{x^2+y^2}$ eller $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$

Ex Räkna ut arean till området som är begränsat av området: $x+y=4$, $x+y=3$, $x-y=1$, $x-y=2$

Förslag: gör ett variabelbyte $u = x+y$, $v = x-y$ $\Rightarrow$ gränser $3 \leq u \leq 4$, $1 \leq v \leq 2$

Arean $= \iint_R dA = \int_3^4\int_1^2 \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dvdu = \left\{ \begin{matrix} \text{För att kunna göra detta} \\ \text{måste } x \text{ och } y \text{ uttryckas i } u \text{ och } v \end{matrix} \right\} = \left\{ \text{Skriv om som } \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \right\} = \int_3^4\int_1^2 \frac{1}{2} dvdu = \frac{1}{2}$

Ex Bestäm $\iint_R e^{-\frac{x^2}{y}} dxdy$ om R är området begränsat av $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 3y^2$

Skriv om: $1 = \frac{x^2}{y}$, $\frac{1}{2} = \frac{x^2}{y}$, $1 = \frac{y^2}{x}$, $\frac{1}{3} = \frac{y^2}{x}$ Vi verkar vilja ha: $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{y^2} \leq 1$, $\frac{1}{3} \leq \frac{y^2}{x} \leq 1$

Sätt $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$

$\iint_R e^{-\frac{x^2}{y}} dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{3}}^{1} e^{-u} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} dvdu$

Betrakta $Jac: \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow |det(Jac)| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$

$Jac = \begin{bmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{bmatrix} \Rightarrow det(Jac) = \frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{y^2} = 4 - 1 = 3$

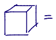
$\int_{1/2}^{1}\int_{1/3}^{1} e^{-u} \cdot \frac{1}{3} dvdu = \ldots$

14.5| Trippelintegraler

Definitionen av en trippelintegral $\iiint_R f dv$ över ett 3-dim område R är samma som för dubbelintegraler men rektanglar byts ut mot boxar. Samma formella satser gäller för trippel- som dubbelintegraler, speciellt medelvärdessatsen som Dener inte tänker visa igen.

Vad innebär en trippelintegral?

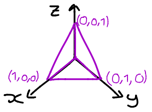
- Hypervolym
- Om f densitet i en punkt på $R \Rightarrow \iiint_R f dV$ = massan
- f laddning $\Rightarrow \iiint_R f dv$ = total charge
- $f = 1 \Rightarrow \iiint_R dv$ = volym(R)

Ex  $=R$ integrera $f(x,y,z)=x^5+\sin(z)$ över kuben: $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c(x^5+\sin(z))dzdydx=\{\text{linjäritet}\}=\int_0^a\int_0^b\int_0^c x^5\,dzdydx+\int_0^a\int_0^b\int_0^c\sin(z)\,dzdydx=\{\int_0^a\int_0^b x^5c\,dydx=\int_0^a x^5bc\,dx=\left[\frac{bcx^6}{6}\right]_0^a=\frac{a^6bc}{6}\}=$$

$$\frac{a^6bc}{6}+\int_0^a\int_0^b\int_0^c\sin(z)\,dzdydx=\{\int_0^a\int_0^b[-\cos(z)]_0^c\,dydx=\int_0^a\int_0^b(1-\cos(c))dydx=(1-\cos(c))\int_0^a\int_0^b dydx=(1-\cos(c))\cdot ab\}=\frac{a^6bc}{6}+(1-\cos(c))ab$$

Ex Hur kan man uttrycka $\iiint_R f\,dv$ som en upprepad enkelintegral om R är en pyramid.

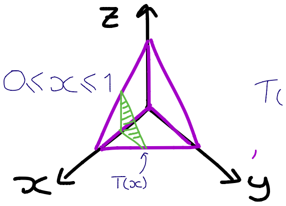


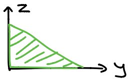
① Hur slicar man?
② Hur tillämpar man Fubini?

Fråga 1

Vi väljer att börja med x-slicing. Detta ger oss ett segment $T(x)$ som är en skiva vid det valda x-värdet.

$0\leqslant x\leqslant 1$

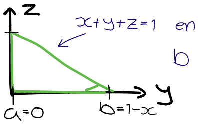


$T(x)=$ 

$$\int_0^1 dx\iint_{T(x)}f\,dzdy=\iiint_R f\,dv$$

Vi väljer att fortsätta vårt slicande i y-riktning.

$$\iint_{T(x)}=\int_a^b\int_c^d f\,dzdy=\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}f\,dzdy$$

$T(x)=$ 

$x+y+z=1$ enligt linalg!

b ges då av $x+y+0=1\Rightarrow y=1-x$

Slutsats: $\iiint_R f\,dv=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}f\,dzdydx$

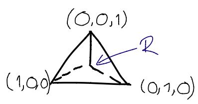
För att lista ut c och d kollar vi på att $z=1-x-y$ och använder det som d. $c=0$ ty $z=0$ på y-axeln.

Ex Över vilket objekt integrerar vi om vi betraktar $\int_0^1\int_z^1\int_0^y f\,dxdydz$

Går den att skriva om på annat vis?

14.5 Trippelintegral forts.

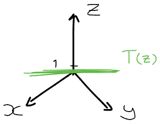
Ex



$\iint_R f\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int^{1-x-y} f\,dz\,dy\,dx$

Låt nu $f=x$ och räkna ut integralen: $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int^{1-x} x - x^2 - xy\,dy\,dz = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}$

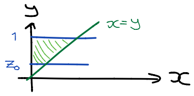
Ex Beskriv på annat sätt (annan parametrisering): $\int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_0^y f\,dx = \iiint_R f\,dv$



Förstå R: Integralen börjar med att slica i z-riktning mellan 0 & 1.

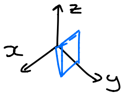
$\iiint_R f\,dv = \int_0^1 dz \iint_{T(z)} f\,dA$

Vad är T(z)? Jo, någon form av domän i ett xy-plan. (Kolla på exemplet i slutet av MVA 5.2)



$\int_{z_0}^1 \int_0^y f\,dx\,dy$, Slicat i y-riktning mellan z & 1.

Vi får något som liknar



För ett givet y-värde: $0 \leq x \leq y$, $0 \leq z \leq y$ Slica i y-riktning

eftersom vi får en kvadrat i varje steg. Vi får tillslut: $\int_0^1 dy \int_0^y \int_0^y f\,dx\,dz$

Ex $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+zx^2+zy^2)e^{xyz}\,dx\,dy\,dz$ är integrering över en enhetskub.

Dela upp så att man får $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dx\,dy\,dz + (5 \text{ lika}) \Rightarrow 6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dx\,dy\,dz$

Hur int map x?

Det blir svårt map x, byt till z först - det ser lättare ut $6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dz\,dx\,dy$

$6\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{xyz} \cdot xy^2\,dz\,dx\,dy = 6\int_0^1\int_0^1 \left[xy^2 \frac{e^{xyz}}{xy}\right]_0^1 dx\,dy = 6\int_0^1\int_0^1 ye^{xy} - y\,dx\,dy = 6\int_0^1 \left[y\frac{e^{xy}}{y} - yx\right]_0^1 dy =$
$6\int_0^1 e^y - y - 1\,dy = 6\left[e^y - \frac{y^2}{2} - y\right]_0^1 = 6(e - \frac{5}{2})$

14.6 Variabelbyte för trippelintegraler

Polära koordinater är awesome för att räkna ut dubbelintegraler. Vi söker något liknande för trippelintegraler. Det finns två saker att tänka på om man vill göra ett koordinatbyte.

1) Ändra integrationsgränser.
2) Beräkna area-/volymelementet i termer av de nya koordinaterna.

Sats

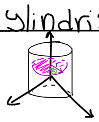
Variabelbyte: Om $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ så $\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$
$\iiint f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ är determinanten av Jacobianen $= \det\begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix}$

Ex $x = au$, $y = bv$, $z = cw$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$ dvs $dx\,dy\,dz = abc\,du\,dv\,dw$ vilket motsvarar intentionen att om man skalar en axel så skalas volymen pss.

Cylindriska koordinater

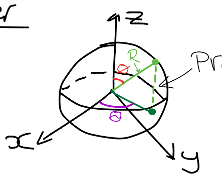


Vill beskriva en punkt via dess z-värde & punkter på en disk för ett fixt z-v

$x = r\cos t$
$y = r\sin t$ $\quad$ r är ett positivt reellt tal (radie i z-plan) $0 \leq \theta \leq 2\pi$
$z = z$ $\quad$ z är godtyckligt

Sfäriska koordinater

$x = R\sin Ø \cos\theta$
$y = R\sin ø \sin\theta$
$z = R\cos Ø$



Projicera ner i xy-planet

Ex $x^2+y^2+z^2=R^2$

Sätt in koord: $R^2\sin^2ø\cos^2\theta + R^2\sin^2ø\sin^2\theta + R^2\cos^2Ø = R^2\sin^2ø(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+R^2\cos^2Ø = R^2$

Volymelementet går att räkna ut: $dV = R^2\sin ø \; dR\,dØ\,d\theta$

Ex Volym av cylinder med radie A som går mellan $a \leq z \leq b$.

$\iiint_R dV = \int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^A r\,dr\,d\theta\,dz = \int_a^b\int_0^{2\pi}\frac{A^2}{2}\,d\theta\,dz = \ldots =$ Volymen är basen gånger höjden.

Ex Volymen till en sfär med radie A? $x^2+y^2+z^2 \leq A$

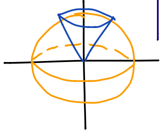
$\iiint dv = \iiint dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^A R^2\sin ø \, dR\,d\theta\,dø = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A^3}{3}\sin ø \, d\theta\,dØ = \int_0^{2\pi}\frac{2\pi A^3\sin ø}{3}\,dØ = \frac{2\pi A^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin Ø\,dØ = \frac{2\pi A^3}{3}\cdot 0 = \overset{\text{What?}\ \downarrow}{0}$

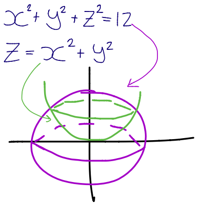
Volymelementet ska alltid vara positivt.
I vårt fall var gränserna fel! $0 \leq \theta \leq 2\pi$ och $0 \leq R \leq A$ stämmer men $Ø$ ska vara $0 \leq Ø \leq \pi$.

14.6 | Trippelvariabelbyten - Ägg och glasstrutar

Ex Betrakta områderna begränsade av

Glasstrut	Ägg
$x^2+y^2+z^2=1$	$x^2+y^2+z^2=12$
$z^2=x^2+y^2$	$z=x^2+y^2$





Räkna ut volymen $\iiint_R dV$!

Glasstrut med sfäriska koordinater

Först behöver vi gränserna!

$0 \leqslant R \leqslant 1$ ty radien

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ty helt varv

$0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{4}$ ◸ liksidig triangel

$$\iiint_R dV = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, dR = \int_0^1 \int_0^{\pi/4} R^2 \sin\phi \, 2\pi \, d\phi \, dR = \int_0^1 2\pi R^2(-\cos(\tfrac{\pi}{4}) - (-\cos(0)) dR = \int_0^1 2\pi R^2 (\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}) dR = 2\pi \tfrac{1}{3} (\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$$

Ägg med cylindriska koordinater

Gränser!

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ty helt varv

Slica i r-riktning, Vi söker den maximala radien. Detta kräver lite räkning => Skärningen mellan de två ytorna. Notera att $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\left.\begin{aligned} r^2+z^2 &= x^2+y^2+z^2=12 \\ r^2 &= x^2+y^2=z \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \; r^2+(r^2)^2=12 \iff r^4+r^2-12=0 \iff r=\sqrt{3} \implies 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3}$$

$$r^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{12-r^2}$$

Vi vet även att $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$

$$\text{Volym} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{r^2}^{(12-r^2)^{1/2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (12-r^2)^{1/2} \cdot r \, dr \, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r^3 \, dr \, d\theta = \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (12-r^2)^{1/2} \cdot r \, dr \, d\theta}_{u=12-r^2, \; du=-2r\,dr} - \frac{9}{4} \cdot 2\pi$$

Notera!

Glasstruten $\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, dR$ räknade vi ut i en viss ordning. Vi hade kunnat byte ordning men det finns ett trick!

$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$ där $f(x,y,z) = g(z) h(x) i(y)$ kan integralen skrivas $\int_e^f h(x) dx \cdot \int_c^d i(y) dy \cdot \int_b^a g(z) dz$

14.7 | Masscentrum & massa

Massa:

$\rho \geqslant 0$ densitet $= \frac{\text{massa}}{\text{volymenhet}}$ totala massan av $R = \iiint_R \rho \, dV$

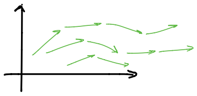
Låt $\rho = 1$

Betrakta $\frac{\iiint x \, dV}{\iiint dV} = \left\{ \begin{matrix} \text{medelvärdes-} \\ \text{satsen} \end{matrix} \right\} =$ det värde x antar som mest dvs x's medelvärde.

$\frac{\iiint x \rho \, dV}{\text{massan}= \iiint \rho \, dV} =$ R's tyngdpunkt i x-riktning. PSS för y och z.

15.1 Vektorfält

Vad vill vi modellera?



I varje punkt får man en vekter, ex: $\phi(x,y)=\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\nabla\phi = (\phi_1, \phi_2)$ (x,y)-värde ⤳ vektor i $\mathbb{R}^2$.

Def

Ett vektorfält är en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Notation

$F(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = F_1 \cdot \hat{\imath} + F_2 \cdot \hat{\jmath}$

Ex $F(x,y) = (1,0)$

För varje (x,y) får man vektorn $[1\ 0]$, •⟶

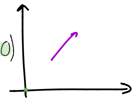
Ex $F(x,y) = (x,y)$

$P_1 = (0,0)$

$F(P_1) = (0,0)$

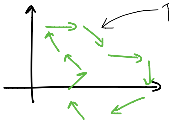
$P_2 = (1,1)$

$F(P_1) = (1,1)$



Om du "följer strömmen" i ~~ett~~ vekterfält följer du en linje aka fältlinjen.

Fältlinjer



positionsvekter $\vec{r}(t)$ för en fältlinje ska röra likt vekterfältet i varje punkt.

M.a.o. $r'(t)$ = hastigheten

$r'(t) = F(r(t))\lambda(t)$ är multiplar av varandra. Dvs tangentriktningen för vi är Parallelt med vekterfältet.

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(\lambda(t)F_1(r(t)), \lambda(t)F_2(r(t)), \lambda(t)F_3(r(t))\right)$

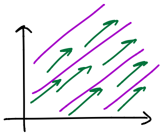
Vektorvis: $\frac{dx}{dt} = \lambda(t)F_1(r(t))$, $\frac{dy}{dt} = \lambda(t)F_2(r(t))$, $\frac{dz}{dt} = \ldots$

$\lambda(t) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{F_1(r(t))} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{F_2(r(t))} = \frac{dz}{dt} \frac{1}{F_3(r(t))} \iff \frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}$

15.1| Vektorfält. forts

I ekv $\frac{dx}{F_1}=\frac{dy}{F_2}=\frac{dz}{F_3}$ finns inget t-beroende (Dennis strök dt i MVA 6.2) I första hand är dessa diff.ekv. Men vi kommer behandla dem som integral ekv.

Ex $F(x,y)=(1,1)$



fältlinjerna: $y=x+C$

$F=(F_1,F_2) \Rightarrow F_1=1, F_2=1 \Rightarrow \frac{dx}{1}=\frac{dy}{1} \Rightarrow dx=dy \Rightarrow x+C=\int dx=\int dy=y+C' \Rightarrow$

$y=x+(C-C')=x+D$

Ex $F(x,y)=(y,-x)$

$F_1=y$, $F_2=-x$

Fältlinjeekv. $\Rightarrow \frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}$, x & y är "beroende av varandra".

Kasta om: $-x\,dx=y\,dy \Rightarrow -\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+C \Rightarrow -x^2=y^2+2C \Rightarrow x^2+y^2=D$

Ex $F(x,y)=(x,-y)$

$F_1=x$, $F_2=-y \Rightarrow \frac{1}{x}dx=-\frac{1}{y}dy \Rightarrow \ln|x|=-\ln|y|+c \Rightarrow |x|=|y|^{-1}\cdot e^c \Rightarrow |xy|=$ positiv konstant

$y=\frac{c}{x}$, $x,y\geq 0$

15.2| Konservativa vektorfält

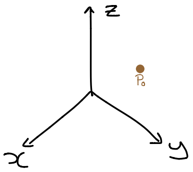
Exempel på vektorfält associerat till en funktion $\phi: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. $\nabla\phi=\left(\frac{d\phi}{dx},\frac{d\phi}{dy},\frac{d\phi}{dz}\right)$

Def

Ett vektorfält F är konservativt om det är på formen $F=\nabla\phi$ & ϕ kallas då potentialen till F.

- ϕ är inte unik. F kan ha flera potentialer.
- Gradienten till funktioner $\phi: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är som "derivator".
- Potentialen är den primitiva funktionen till ett vektorfält.
- Potentialer finns inte alltid.

Ett exempel på konservativa vektorfält är gravitationsfält.



P_0 är en punkt med massa m.

$F(P)=$ gravitationspilarna i en punkt P.

Vektorn: Riktningsvektor: $-\frac{P-P_0}{|P-P_0|}$

Storlek: $\frac{k\cdot m}{|P-P_0|^2}$

$\Bigg\}\ F=\frac{-(P-P_0)}{|P-P_0|}\cdot\frac{km}{|P-P_0|^2}=\frac{-km(P-P_0)}{|P-P_0|^3}$

Potentialenergi: $\phi=\frac{km}{|P-P_0|}+C$

$\nabla\phi=-k\cdot m\frac{(P-P_0)}{|P-P_0|^3}$

Potentialenergin beror bara på läget från masscentrum.

Potential finns inte alltid?

$F(x,y)=(-y,x)$.

Antag att det finns $\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=(-y,x)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \Rightarrow -1=\frac{\partial}{\partial y}(-y)=\ldots\ldots=\frac{\partial}{\partial x}(x)=1$ ajdå

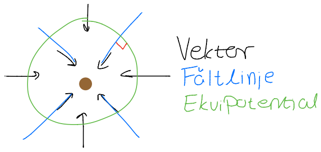
$F(x,y)=(-y,x)$ är ej konservativt.

Ett nödvändigt villkor för att kons.v-fält ska existera är att: $\nabla\phi=F=(F_1,F_2,F_3)$ och eftersom de blandade derivaterna för en funktion är samma $\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}$

Om F är konservativt, dvs $F=\nabla\phi$ så är ϕ bestämd upp till en konstant. Vi kallar ändå kurvorna bestämda av $\phi=C$, för en konstant C, för ekvipotentialkurvor.

Ex gravitation: $F=\frac{-(P-P_0)\cdot km}{|P-P_0|^3}$, $\phi=\frac{km}{|P-P_0|}+C$

Ekvipotential av typen $|P-P_0|$ = konstant



Ekvipotentialkurvorna skär alltid fältlinjerna ortogonalt <=>
$\nabla\phi$ är ortogonal till nivåytorna till ϕ.

Ex $F(x,y)=(x,-y)$, är F konservativt?

Test: $F=(F_1,F_2)=(\hat{\imath}F_1+\hat{\jmath}F_2)=x\hat{\imath}-y\hat{\jmath}$

$$0=\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}=0$$
$$F_1=x \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y}=0$$
$$F_2=-y \Rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x}=0$$

Sätt upp ekvationer: $\nabla\phi=(x,-y)$. 1) $\frac{\partial\phi}{\partial x}=x$
2) $\frac{\partial\phi}{\partial y}=-y$

Integrera 1) map x: $\phi=\frac{x^2}{2}+C(y) \Rightarrow \phi=\frac{x^2}{2}+C(y)$ för någon funktion $C(y)$, dvs oberoende av x.
Sätt in i 2) $\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2}+C(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}C(y)=-y$
Integrera map y: $C(y)=\frac{-y^2}{2}+D$ (vänsterledet beror enbart på $y \Rightarrow D$ konstant)
1) + 2) + räkning $\Rightarrow \phi=\frac{x^2}{2}+C(y)=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+D$, D konstant

Sanity check: $\nabla\phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\left(\frac{2x}{2},\frac{-2y}{2}\right)=(x,-y)$

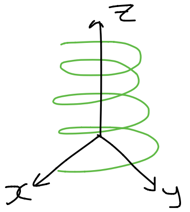
15.3 | Linjeintegraler / Kurvintegraler

Om vi har en kurva, C, i rymden eller planet är längden mellan punkt vid t=a och t=b för en parametrisering $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$: $\int_C ds=\int_a^b(x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2)^{1/2}dt$

Om vi har en funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ vill vi ibland integrera den över $C(C)$: int. f längs C.
$\int_C f\,ds=\int_a^b f(r(t))\cdot\left|\frac{dr}{dt}\right|dt$ Här är r(t) en param. av kurvan.

Betydelse: $f=1 \rightsquigarrow$ längden
$f>0 \rightsquigarrow$ densitet per längdenhet

Ex



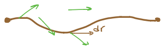
En helix, tänk en kedja med varierande tjocklek. $r(t)=(\cos(t),\sin(t),t)$
Densitet: $f(x,y,z)=\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}$
Beräkna massa mellan $t=[0,2\pi]$.

$$\int_C\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}ds=\begin{cases}r(t)\text{ given}\\ ds=\left|\frac{dr}{dt}\right|dt=\sqrt{(-\sin^2(t)+\cos^2(t))+1}=\sqrt{2}\,dt\end{cases}$$

$$\int_C f\,ds=\int_0^b\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\cos^2 t}{1}\sqrt{2}\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{dubbla}\\ \text{vinkeln}\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2t)+1}{2}\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\,dt=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\frac{\pi}{2}$$

15.4 | Kurvintegrering längs vektorfält

Högstadiet (var gick Dennis på högstadiet?) och Newton säger att $W=F\cdot s$.
Nu vill Dennis att $s=\{\text{en kurva}\}=C$ och kraften F ~~ett~~ varierande vektorfält.
Frågan är nu vad W blir.....



Enda kraften som räknas är projiceringen av F ner på dr. $W=F\cdot dr$, åtminstone om vi rör oss oändligt lite. $W_C=\int_C F\cdot dr$

15.4 | Integrering längs vektorfält

$\int_C F\cdot dr \begin{cases} C - \text{kurva i } \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \\ F \text{ vektorfält} \end{cases}$

Räkna ut genom att parametrisera kurvan: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $dr = (dx\,dy\,dz) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)dt$
Det är dock inte alltid det räcker med en parametrisering.

Ex Beräkna kurvintegralen längs vektorfältet: $F(x,y) = (2x+y, x)$ mellan $(0,0)$ & $(1,1)$ längs två olika kurvor: $y=x$ och $y=x^2$.

1) $y = x \Rightarrow \int_C F\cdot dr = \int_C (2x+y)\,dx + x\,dy = \begin{Bmatrix} \text{Parametrisera som} \\ y=x=t,\ 0\leq t\leq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=t, & dx=\frac{dx}{dt}\cdot dt = dt & F_1 = 2x+y = 2t+t = 3t \\ y=t, & dy = \frac{dy}{dt}\cdot dt = dt & F_2 = x = t \end{Bmatrix} =$

$$\int_C F\cdot dr = \int_0^1 3t\,dt + t\,dt = \int_0^1 4t\,dt = \left[\frac{4t^2}{2}\right]_0^1 = 2$$

2) $y = x^2$

Param: $x=t,\ y=t^2$
$dx = \frac{dx}{dt}dt = dt$
$dy = \frac{dy}{dt}dt = 2t\,dt$

$$\int_C 2x+y\,dx + x\,dy = \int_0^1 2t+t^2\,dt + t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 3t^2 + 2t\,dt = \left[\frac{3t^2}{3} + \frac{2t^2}{2}\right]_0^1 = 2$$

(Samma svar)

Ex Samma kurvor men $F(x,y) = (-y, x)$

1) $x=y=t$
$\int_C F\cdot dr = \int -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 -t\,dt + t\,dt = 0$

2) $x=t,\ y=t^2$
$\int_C F\cdot dr = \int -y\,dx + x\,dy = \int_0^1 -t^2\,dt + t\cdot 2t\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ (ej samma)

Fältet $F(x,y) = (2x+y, x)$ är konservativt. $\phi = x^2 + xy$
$F(x,y) = (-y, x)$ är inte konservativt.

Dessutom: Jfr konservativa fältet så är en potential $\phi = x^2 + xy + C$ & $\phi(1,1) - \phi(0,0) = W$
$W \equiv$ det uträttade arbetet.

Om F är konservativt $\Rightarrow \int_C F\cdot dr$ oberoende av väg mellan ändpunkterna, utan bara punkterna i sig. $\phi(P_2) - \phi(P_1)$

Def
Ett område $U \subseteq \mathbb{R}^2 \,||\, \mathbb{R}^3$ är sammanhängande om varje par av punkter i U kan sammanbindas med en kurva.

Def
Ett område $U \subseteq \mathbb{R}^2 \,||\, \mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande om varje enkelt sluten kurva kontinuerligt kan krympas ihop till en punkt.

Ex
$\mathbb{R}^2$ är sammanhängande men $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ är ej enkelt sammanhängande.

Russele Crowe's sats
Om U är enkelt sammanhängande och derivatatesterna för konservativa vektorfält går igenom så är fältet konservativt!

Ex $F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $F: \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}$

Kolla: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}$ $\rightsquigarrow$ Vi vill att potential blir $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$

ϕ är ej överallt definierad, detta säger något om vinkeln.

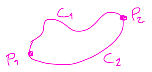
Sats

Följande 3 påståenden är ekvivalenta:
1) F är konservativt.
2) $\int_C F \cdot dr = 0$ om C är en sluten kurva.
3) $\int_C F \cdot dr$ beror bara på ändpunkterna till C.

Bevis

2 och 3 är ekvivalenta.

$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr \iff \int_{C_2} F \cdot dr - \int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2 - C_1} F \cdot dr = 0$ där



1) => 3)

$F = \nabla \phi$, $\int_C F \cdot dr = \int_C \nabla\phi \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\phi}{dt} dt = \phi(P_2) - \phi(P_1)$

3) => 1)

Om $F = \nabla\phi$ och $\int_{P_1 \sim P_2} \nabla\phi \, dr = \phi(P_2) - \phi(P_1)$.

Enligt 3) kan vi definiera $\phi P_2 - \phi P_1 = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr$ och vi kan anta att $\phi P_1 = 0$, $\phi P_2 = \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr$, man kan kolla att $\nabla_{P_2} \int_{P_1}^{P_2} F \cdot dr = F \Rightarrow \phi \nabla = F$

Understryka att ϕ s.a. $F = \nabla\phi$ är en prim funk till F.

Ex Bestäm a & b s.a. $F = (axy+z, x^2, bx-2z)$ är konservativt & beräkna integralen mellan två punkter på en kurva som går mellan punkterna $(0,1,0)$ & $(2,3,4)$.

Derivata test: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ & $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial y} = ax \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \end{array}\right\} a=2$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_3}{\partial x} = b \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = 1 \end{array}\right\} b=1$ $\Rightarrow$ Om F kons $a=2$, $b=1 \Rightarrow F = (2xy+z, x^2, x+2z)$

Hitta potential: Vi söker $\phi(x,y,z)$ s.a. $\overset{1)}{\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy+z}$, $\overset{2)}{\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2}$, $\overset{3)}{\frac{\partial \phi}{\partial z} = x+2z}$

Integrera alla elu & Stryk dubletter.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{1) Integrera } 2xy+z \text{ map } x & \Rightarrow & \frac{x^2}{2}y + zx + C \\ \text{2) Integrera } x^2 \text{ map } y & \Rightarrow & \cancel{x^2y + C} \\ \text{3) Int } x+2z \text{ map } z & \Rightarrow & \cancel{xz} + z^2 + C \end{array}\right\} \phi = x^2y + zx + z^2$$

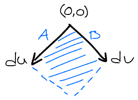
Sanity check!
Derivera ϕ map x, y, z...

$\int_C F \cdot dr = \phi(2,3,4) - \phi(0,1,0) = 40$

15.5| Ytintegraler

I envariabel integrerar man ofta längs en rak linje $\overset{\int_a^b f\,dx}{a \vdash\!\!\!\relbar\!\!\!\relbar\!\!\!\dashv b}$ i flervarr är vi coolare och integrerar kurvor i rymden eller planet. Vi har även integrerat områden i $\mathbb{R}^2$.
Vi vill beräkna $\iint_R f\,dS$ där R är en yta i $\mathbb{R}^3$. Genom att parametrisera ytan: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ $z=z(u,v)$ kan vi göra sånt coolt!

Frågan vi alla ställer oss är hur kan vi uttrycka dS på ett bättre sätt? $dS = ▨\, du\,dv = ▨\, dA$



Ytan är ~rektangel uppspänd av $\dfrac{r(du)-r(0)}{du}$ & $\dfrac{r(dv)-r(0)}{dv}$

Gör du & dv små: $\frac{\partial r}{\partial u}\ \frac{\partial r}{\partial v}$, Vad är nu arean av den uppspända rektangeln?
Jo, $|A \times B| = dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv$ om $du\,dv \to 0$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| = \text{abs}\left(\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\right) = \text{abs}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},\ -\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right),\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

Notera!

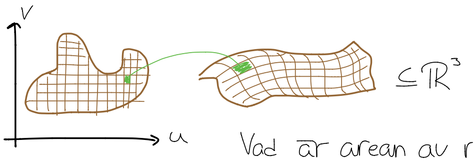
$$\text{Kryssprodukten} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$
$$\text{abs}(\nearrow) \Rightarrow dS = \left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2} \cdot du\,dv$$

Specialfall

$x=u$, $y=v$, $z=f(x,y)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-f_{u_1}, -f_{v_1}, 1)$
$\frac{\partial r}{\partial v} \times \frac{\partial r}{\partial u} = (f_{u_1}, f_{v_1}, -1)$

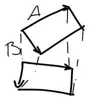
15.5 | Ytintegraler

Utgå från den parametriserade ytan: $x = x(u,v)$
$y = y(u,v)$
$z = z(u,v)$



Vad är arean av rektangl på "filten" i förhållande till arean i första bilden?

dS = ytarea-elementet = ▨ $du\,dv$



← arean av rektangeln uppe $= |A \times B|$.
Formeln som tidigare härletts: $dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv = \left|\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| du\,dv$

Notera

$A \times B$ = vektor som har längd "area som spänns upp av $A \times B$", men är också vinkelrät mot planet som spänns upp av A & B, dvs normal till ytan. Viktigt för flödesintegraler.

I ett specialfall: $z = f(x,y)$ (funktionsyta) med $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$ =>
$N = (-f_u, -f_v, 1)$ => $dS = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}\; du\,dv$

Om vi använder sfäriska koordinater: $x = a \cdot \cos\theta \cdot \sin\phi$
Parametrisering av sfär med $R = a$ → $y = a \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi$ => $dS = a^2 \cdot \sin\phi \, d\phi \, d\theta$
$z = a \cdot \cos\phi$

Jämför med volymelementet $dV = R^2 \cdot \sin\phi \, dR \, d\theta \, d\phi$

Ex Funktionsytor. $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \geq 0$

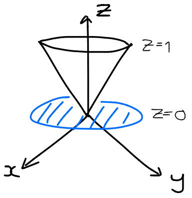
Beräkna arean av den del av konen som ligger mellan $0 \leq z \leq 1$.

Funktionsyta => $dS = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right)^{1/2} dx\,dy$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right\} dS = \left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1\right)^{1/2} dx\,dy = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1\right)^{1/2} dx\,dy = \sqrt{2}\, dx\,dy$$

$$\iint_{\text{Parametrisering}} dS = \iint \sqrt{2}\, dx\,dy$$

Vad går x & y mellan?



Det är en integral över $x^2+y^2 \leq 1$
$0 \leq z = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \iff 0 = 0^2 \leq x^2+y^2 \leq 1^2 = 1$

dvs $\iint_{\triangledown} dS = \iint_{▨} \sqrt{2}\, dx\,dy =$
→ 1. Polar form
→ 2. Arean $= \pi r^2 = \pi \cdot 1 = \pi$
$\Rightarrow \sqrt{2}\pi$

Ex $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ Bestäm arean av ytan som motsvaras av att $u^2+v^2 \leq 1$.

Detta är ingen gödig funktionsyta...

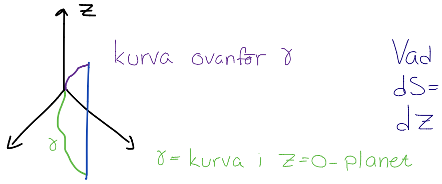
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -4(u^2+v^2)$
$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = 4(u^2-v^2)$ => $dS = 4 \cdot \sqrt{2}\,(u^2+v^2)\,du\,dv \Rightarrow \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dS = \iint_{u^2+v^2\leq 1} 4\sqrt{2}(u^2+v^2)\,du\,dv = \left\{\begin{array}{l} u = r\cdot\cos\theta \\ v = r\cdot\sin\theta \\ du\,dv = r\cdot dr\cdot d\theta \end{array} \middle| \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}\right\} =$
$\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)} = 8uv$

Polara koordinater

$$4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = 4\sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\,\pi$$

Svaren i de två exemplen liknar varandra, ufr? Jo, om: $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ =>
$x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0 \rightsquigarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$. Emellertid skiljer de sig åt: $2\sqrt{2}\pi \neq \sqrt{2}\pi$.
Detta eftersom exempel 2 inte bjuder på en korrekt parametrisering. $(-u,-v)$ ger samma punkt som (u,v).

Ex



Vad är ds?

dS= båglängdselementet

dz = längd i z-led

$\Rightarrow dS = \overset{\text{bas}}{ds} \cdot \overset{\text{höjd}}{dz}$

En yta går längs en kurva $y = \frac{x^2}{2}$ i xy-planet (z=0) & upp till en kurva $z=2x$.
Vad är arean till denna yta, $0 \leqslant x \leqslant 1$?

$\iint dS = \iint 1 \cdot dz\,ds$

$ds = \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \Rightarrow \iint dS = \int_0^1 \int_0^{2x} \sqrt{1+x^2}\,dz\,dx = \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left[\begin{smallmatrix} u=1+x^2 \\ du=2x\,dx \end{smallmatrix}\right] = \int \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right] =$

$f(x) = \frac{x^2}{2}$

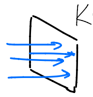
$\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(2^{3/2}-1) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

ÖB $G(x,y,z)=0$, där z entydigt bestämt av x och y så är $dS = \left|\frac{\nabla G}{G_3}\right| dx\,dy$

15.6 | Flödesintegraler

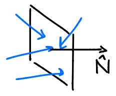
En typ av spaceade arbetsintegraler ($\int F \cdot dr$) och även ytintegraler. Med dessa eftersträvar vi att modellera följande:

Givet ett vektorfält (hastighetsfält) i $\mathbb{R}^3$ & en yta vilken hastighetsfältet går igenom kan ett enkelt fall vara:



Kvadrat där vektorfältet går ⊥ ytan.

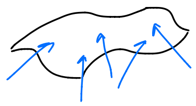
Flödet borde då vara: (Längden på vektorfältet)(arean på ytan)



Flödet: Vektorfältets komponenter vilka är sammriktade med $\hat{N}$. $\Rightarrow (F \cdot \hat{N})$(arean)

Och $F \cdot \hat{N}$ projiceringen av F på normalriktning

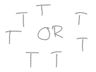
Param yta:



$\Rightarrow$ Flödesintegral: $\iint_{\text{Ytan}} F \cdot \hat{N}\,dS$

Vi har sedan tidigare formler för dS men vad gör vi med $\hat{N}$?
Ovan kan skrivas som: $\hat{N}\,dS = d\vec{S}$ (eller $d\mathbf{S}$) vilket är någon form av "vektorytareaelement".

$\iint_y F \cdot \hat{N}\,dS = \iint_y F \cdot d\vec{S}$



Enhetsnormalen kan peka åt två håll och bestämmer ytans orientering.

Om $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \Rightarrow dS = \left|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right| du\,dv = |N|\,du\,dv$

$\hat{N} = \pm\frac{N}{|N|} \Rightarrow d\vec{S} = \hat{N}\,dS = \frac{N}{|N|} \cdot |N|\,du\,dv = N\,du\,dv$

enhetsnormal

Specialfall

Parametriserad fall: $\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \Rightarrow d\vec{S} = \pm \quad du\,dv$

Funktionsyta: $x=u,\ y=v,\ z=f(x,y)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\,dv = \pm(-f_u, -f_v, 1)\,du\,dv$

$G(x,y,z)=0$: Implicit def yta (z entydigt bestämd av x & y) $\Rightarrow d\vec{S} = \pm\frac{\nabla G}{G_3}\,dx\,dy$

Ex Bestäm flödesintegralen där $F(x,y,z)=(x,x,1)$ genom ytan $z=x^2-y^2$, begränsad av cylindern $x^2+y^2=a^2$.

F är given men vi saknar $d\vec{S}$ och integralen...

Ytan är en funktionsyta: $z=f(x,y)=x^2-y^2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{S}=\pm(-f_x,-f_y,1)\,dxdy \\ f_x=2x \\ f_y=-2y \end{array}\right\} \pm(-2x,2y,1)\,dxdy$$

Integralen: $$\iint_Y F\cdot d\vec{S}=\iint_Y (x,x,1)\overset{\text{väljer }+}{\cdot}(-2x,2y,1)\,dxdy=\iint_Y -2x^2+2xy+1\;dxdy$$

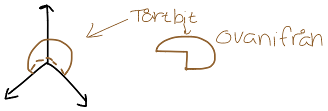
Y: $z=x^2-y^2$ är någon form av sadel innuti cylindern $x^2+y^2=a^2$. Dvs området vi integrerar över är $x^2+y^2\leqslant a^2$

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(2xy-2x^2+1)\,dx\,dy=\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{array}\middle|\begin{array}{l} 0\leqslant r\leqslant a \\ 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi \end{array}\right\}=\int_0^a\int_0^{2\pi}(2r^2\cos\theta\sin\theta+1-2r^2\cos^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

15.6 | Flödesintegraler

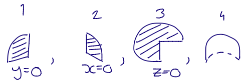
Ex Beräkna flödet genom ytan:

Där sfären har radie a & vi snittar plana snitt längs $x=0$, $y=0$, $z \geq 0$ och $F(x,y,z)$

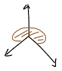


Funktionsytor: $d\vec{S}=(-f_u,-f_v,1)\,dx\,dy$

$\iint_{TB} F\cdot\hat{N}\,dS \leftarrow$ Ytan är inte parametriserad av en enda ekvation. 4 ytor:



3)



$\iint_3 F\cdot\hat{N}\,dS=\iint_3 F\,d\vec{S}$

$dS=$ ytareaelementet, $dS=dx\,dy$ i xy-koordinater

$\hat{N}=(0,0,-1)$ för att det pekar nedåt

$$\iint_3 (x,y,z)(0,0,-1)=\iint_3 (0x+0y-z)\,dx\,dy=[z=0]=0$$

4) $\iint_4 F\cdot d\vec{S}=\left\{\hat{N}=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)\right\}=\iint_4 (x,y,z)\cdot\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)dS=\iint\frac{x^2+y^2+z^2}{a}dS=\iint\frac{a^2}{a}dS=a\iint dS= \xrightarrow{i}$ Sfäriska $\xrightarrow{ii}$ $\frac{3}{8}$ av en sfär med radie a

ii) $a\iint dS=a\frac{3}{8}\cdot$ Arean(sfär med radie a) $=\frac{3a}{8}\cdot 4\pi a^2=\frac{\pi}{2}a^3$

1 & 2) Liknar 3) (bidrag 0).

16.1 | Diverse om div & Curl

Olika sätt att beräkna trippel- och dubbelintegraler men främst flödes- och arbetsint...

F: vektorfält $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Om vi har $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ låtsas vi att vi är i $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ genom att sätta: $F(x,y)=F_1\hat{\imath}+F_2\hat{\jmath}+0\cdot\hat{k}$ lagt in i vektorfält i $z=0$.

Påminner om $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

Def

Div = divergens $=\nabla\cdot$

$$\text{Div } F=\nabla\cdot F=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(F_1,F_2,F_3)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$$

Tar in ett vektorfält, returnerar en skalärvärd funktion.

Def

Curl $=\nabla\times$

$$\text{Curl } F=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Ex

1) Om $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(F_1,F_2,0)$

$$\text{Curl } F=\left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k$$

2) Curl $F=0$ motsvarar exakt derivatan för konservativa vektorfält.

3) Div kan vara väldigt lätt att räkna ut.

$F=e^{\sin(yz)}+y,\ xy+\frac{\sin(z)}{z},\ e^{x^2})$

Div $F=0+x+0=x$

4) $F=(-\Omega y, \Omega x)$, Ω konst

$\text{curl } F = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k = \Omega - (-\Omega)k = 2\Omega k$

OBS: Curl "ser inte" konservativa vektorfält men ser roterande vektorfält.

Om $r(t)=(\cos(\Omega t), \sin(\Omega t))$ är $r'(t)=F=(-\Omega y, \Omega x)$ Så Ω är vinkelhastighet

Div F?

Vad är div F egentligen? "div F" är en skalär och div F(P) kommer vara "utflödet - inflödet" i en liten omgivningen till punkten p. Detta är en konsekvens av Gauß, se senare kap.

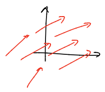
Ex Konstant vektorfält: $F(x,y)=(1,1)$

$\text{div } F = \frac{\partial 1}{\partial x} + \frac{\partial 1}{\partial y} = 0$

Tillämpning av Div

ϕ = temperatur i en punkt (x,y,z) vid en tidpunkt t.

$\nabla\phi$ = riktningen som ϕ ökar mest i i en given punkt.



Värmeflöde

$\text{div } \nabla\phi$ = värmeflöde ut - värmeflöde in i punkten.

$\text{div} = \nabla\cdot \Rightarrow \nabla\cdot\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$

Speciellt: $\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi = \Delta\phi$ & om $\Delta\phi = 0$ har vi ingen värmespridning.

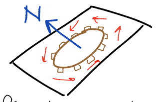
Alltså är temperaturen stabil i tid.

$\Delta\phi = 0$ är värmeledningsekvationen (utan tid).

Curl F?

Curl F är en vektor som vi tolkar på följande sätt: Givet en vektor [7,7,2], $N=(a,b,c)$

Curl $F\cdot N$ = skalär



$ax+by+cz=d$

Krafterna får kugghjulet i planet $ax+by+cz=d$ att snurra. => Vinkelhastighet som hjulet får av den här kraften. Av Stokes sats.

16.2| Identiteter

div ∇, curl har massa relationer. Se sats 3!

g) $\nabla\cdot(\nabla\times F)=0$ F vektorfält

h) $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ Φ skalär

16.3| Green's Theorem

Motiv/Bakgrund: · $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (envarre)

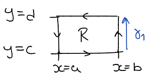
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

· $F=\nabla\phi \quad \cdot p \xrightarrow{\gamma} \cdot p'$

$\int_\gamma F\cdot dr = \phi(p')-\phi(p)$

Men hur löser vi mer generella arbetsintegraler där integralen inte bara beror på randen?

Dennis påstår att arbetsintegralen till randen av ett område R: $\iint_{\partial R} F\cdot dr = \iint_R \nabla\times F\cdot k\cdot dA = \iint_R\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy$



Green's Theorem

$\int_c^d\int_a^b\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_R F\cdot dr = \left\{\text{Fokus på } \iint \frac{\partial F_2}{\partial x}dx\,dy\text{, den andra pss}\right\} = \int_c^d [F_2(b,y)-F_2(a,y)]dy = \int_c^d F_2(b,y)dy - \int_c^d F_2(a,y)dy =$

$\left\{\text{arbetsintegralen längs } \uparrow = \int_{\gamma_1} F\cdot dr = \int_{\gamma_1}(F_1,F_2)\cdot(\overset{=0}{dx}, dy) = \int_{\gamma_1} F_2\,dy \quad \overset{x=b}{dx=0}\right\} = \ldots$

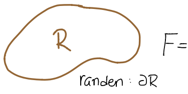
Ex

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) &= (0,x) \\ F(x,y) &= (-y,0) \\ F(x,y) &= \tfrac{1}{2}(-y,x) \end{aligned}\right\} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \Rightarrow \int_{\partial R} F \cdot dr = \iint_R 1 \cdot dx\,dy = \text{arean till } R.$$

Def

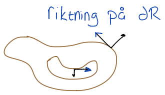
Om $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller $\operatorname{curl} F = 0$ så är F virvelfritt.

16.3| Greens Sats



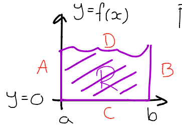
$F=(F_1,F_2)$ $\Rightarrow$ $\int_{\partial R} \vec{F}\cdot dr = \iint_R \text{curl } F\cdot k\, dA = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$

∂R har en riktning/orientering. Grundidéen är att



För att få motsatt riktning negerar man uttrycket.

Ex



$\vec{F}=(-y,0)$ Green: $\iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy = \iint 0-(-1)dxdy = \iint dxdy =$ Arean av R.

$\int_{\partial R}(-y,0)\cdot dr = -\int y\,dx + 0dy = \int -y\,dx = \overset{①}{\int_A -y\,dx} + \overset{②}{\int_B -y\,dx} + \overset{③}{\int_C -y\,dx} + \overset{④}{\int_D -y\,dx} =$

1) Parametrisera: $y=t, x=a$, $dy=dt$, $dx=0$ $\Rightarrow$ $\int -y\,dx = 0$

2) Samma som 1).

3) $y=0$, $x=t \Rightarrow dy=0, dx=1 \Rightarrow \int 0dy=0$

4) Parametrisering: $y=f(t), x=t.$ $a\leq t\leq b$ (moturs $\Rightarrow$ $b\to a$) , $dy=f'(t)dt$, $dx=dt$

$\int_D -y\,dx = \int_b^a -f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Green säger: Area$(R) = \int_a^b f(t)dt = \int_{\partial R} F\cdot dr$

Ex Beräkna arbetsintegralen över  = högra halvan av enhetsdisken där $F=(y^2,x)$.

Två approacher.

1. Parametrisera alla kurvor (| och ⊃) och beräkna de två arbetsintegralerna.
2. Green!

$\int_{\partial R} F\cdot dR = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R (1-2y)dxdy = \iint 1dxdy - \iint 2y\,dxdy$

Två alternativ igen. 1: Polära koordinater.
2: Vara listig...

$\iint_R 1dxdy =$ Arean$(R) = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\quad\left| -2\iint y\,dxdy = \left\{ \frac{\iint y\,dxdy}{\iint dxdy} = \text{tyngdpunkt i y-led för densitet 1 och även medelvärdet till } y \right\} = -2\left(\text{Arean}(R)\cdot \overbrace{\text{medel av } y}^{0}\right) = 0\right.$

Svar: $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

Ex Räkna ut arbetsintegralen för ⟩ (cirkeldelen av förra kurvan) med samma vektorfält.

Problem: Kurvan är inte sluten, men om vi lägger till $x=0$ så får vi samma område igen.

$\int_{⟩} F\cdot dr + \int_{x=0} F\cdot dr = \int_{D} F\cdot dr = \{\text{Samma som förra}\} = \frac{\pi}{2}$

För att få ut vår båj måste vi hitta $\int_{x=0} F\cdot dr$. Parametrisera: $y=t$, t går från $1\to -1, x=0$
$dx=0$, $dy=dt$

$\int F\cdot dr = \int_1^{-1} y^2dx + xdy = 0 \Rightarrow \int_{⟩} F\cdot dr = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

16.4| Gauß divergenssats

Greens idé är att överföra en arbetsintegral över en rand till en dubbelintegral av det inre.
Gauß idé är att överföra en flödesintegral över randen till något till en trippelintegral över det inre.

Gauß divergenssats

Givet ett område i $\mathbb{R}^3$ (ex en boll men inte en sfär (sfären är bara skalet)):
$\iiint_R (\text{div } F)dV = \iint_{\partial R} F\cdot \hat{N}\,dS = \iint_{\partial R} F\cdot d\vec{S}$ där flödesintegralen alltid pekar ut från området.

Bevis

Fyll upp området med boxar. Flödesintegralen för två boxar som ligger dikt an är densamma som om de båda var en stor box (Skarven = 0). [Kolla på nätet.]

Konsekvens av Gauß

Boll med radie ε

Vi får en tolkning av $\nabla \cdot F$. Medelvärdesbilda runt en punkt P: $\operatorname{div} F(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon)} \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dV =$
$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3} \iint_{\partial B_\varepsilon} F \cdot \hat{N} dS = \frac{1}{\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}} \cdot \left(\text{Flödet ur en liten sfär runt P}\right)$

Mao säger Gauß att summan av all källproduktion i R är flödet ut ur R.

Ex Beräkna flödet ut ur sfären med radie r och centrum i $(a,b,c) \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = A^2$

Gauß: $\iint_{\partial R} F \cdot \hat{N} dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \iiint_R y + x + 2z \, dV$

Alt 1: Sfäriska koordinater $\Rightarrow$
$x = a + R\cos\theta\sin\varphi$
$y = b + R\sin\theta\sin\varphi$ lite jobbigt att hitta dV
$z = c + R\cos\varphi$

Alt 2: Betrakta $\iiint y \, dV$ som $\approx$ tyngdpunkt i y-led.

$\frac{\iiint_R y \, dV}{\iiint_R dV} = b$ (samma sak för x-led och z-led)

$\iiint y dV = \iiint dV \cdot b = \frac{4\pi A^3}{3} b \Rightarrow \iint_{\partial R} F \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi A^3}{3}(a + b + 2c)$

Notera!

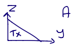
Sökes flödet innåt negerar man $\nabla \cdot$

Ex Beräkna utflödet från en tetraeder (Pyramid) vilken begränsas av: koordinataxlarna samt $x + 2y + 3z = 6$. $F = (x, z, 0)$

Alt 1: Parametrisera de 4 sidorna till området.
Alt 2: GAUß!

$\iint_R F \cdot dS = \iiint_R \nabla \cdot F dV = \iiint_R 1 + 0 + 0 \, dV = \iiint_R dV =$ Volym(R) = [Fråga Beta!]

Trippelintegraler, Skiva i x-riktning. $\int_0^6 \left(\iint_{T(x)} dy dz \right) dx = \int_0^6 \text{Arean}(T(x)) dx = \Big\{$



Arean $= \frac{b \cdot h}{2}$ $b = \frac{6-x}{2}$ $h = \frac{6-x}{3}$ $\Rightarrow$

Arean: $\frac{\left(\frac{6-x}{2}\right)\left(\frac{6-x}{3}\right)}{2} = \frac{(x-6)^2}{12}$

$\int_0^6 \frac{(x-6)^2}{12} dx = \left[\frac{(x-6)^3}{36}\right]_0^6 = 0 - \frac{(-6)^3}{6^2} = 6$

Ex Räkna ut flödet upp ur halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$. & $F = (x, y, z + x^2 + y^2)$

Vi kan inte använda Gauß direkt ty halvsfären är ej randen till ett område. Lägg till en bott och gör istället Gauß på halvbollen: $\iiint_{◓} \operatorname{div} F \, dV = \underset{①}{\iint_{◠} F \cdot d\vec{S}} + \underset{②}{\iint_{○} F \cdot d\vec{S}}$

1) $\iiint_{◓} \operatorname{div} F dV = \iiint_{◓} 1 + 1 + 1 \, dV = 3 \cdot$ Volym(◓) $= \frac{3 4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$

2) $\iint F \cdot \hat{N} \, dS = \left\{ \begin{matrix} \text{Måste ha: } dS = dxdy \\ -\hat{N} = (0,0,-1) \end{matrix} \right\} = \iint (x, y, z + x^2 + y^2) \cdot (0,0,1) dxdy = \iint -(z + x^2 + y^2) dxdy = [z = 0] =$
$\iint x^2 + y^2 dxdy = -\int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta = -\frac{a^4}{4} \cdot 2\pi = -\frac{\pi a^4}{2} \Rightarrow \iint F \cdot \hat{N} dS = 4\pi a^3 - (-\frac{\pi a^4}{2})$

Tentamen 2015-01-05, del 2

3. Låt $\vec{F}=(-ay, bx)$ vara ett vektorfält (a och b konst).

a) Låt C vara randen till ett område med inducerad orientering (normal, sen vänster). Bestäm en relation mellan a & b så $\oint_C F dr = Area(D)$.

Greens sats: $\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C F \cdot dr \Rightarrow \iint_D b-(-a)\, dxdy = (a+b) \iint dxdy = (a+b) \cdot Area(D)$.
(a+b) måste alltså vara lika med 1.

b) Använd $\oint F \cdot dr$ för att beräkna arean av området som ligger innanför kurvan
$r(t) = 3(\cos(t) + \sin(t))\hat{\imath} + 2(\sin(t) - \cos(t))\hat{\jmath} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\oint F dr = Area$ om $a+b=1$, sätt $a=b=\frac{1}{2}$ (för det är tydligen bra).
$\frac{1}{2}\oint -y + x\, dxdy = \left\{ \begin{matrix} \text{Sätt in } r(t), dx, dy \\ \text{i termer av } t \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x(t) = 3(\cos(t) + \sin(t)),\ dx = 3(-\sin(t) + \cos(t))dt \\ y(t) = 2(\sin(t) - \cos(t)),\ dy = 2(\cos(t) + \sin(t))dt \end{matrix} \right\} = \{\text{insättning}\} = 12\pi$

4) $F = (y^2, x+yz, z)$

a) Bestäm div och curl av F.
b) Bestäm flödet upp ur halvsfären $x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$

a) $\text{div} F = (0, z, 1)$

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (-y, 0, 1-2y)$$

b) Sfäriska koordinater eller Gauß.

Gauß: $\iiint_R \text{div} F\, dV = \int_{\partial R} F \cdot d\vec{S}$

Problem eftersom vi inte har ett lock. Vi måste räkna ut det som om randen inkluderar detta lock och sedan dra ifrån det. Vad är denna rand? Jo $z=0$ och halvsfären. Kalla dem S_2 och S_1.

$\iiint_{\circledast} (z+1)\, dV = \iiint_R \text{div} F\, dv = \iint_{S_1} F \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} F d\vec{S}$

S_2
$\iint_{S_2} F \cdot \hat{N} d\vec{S} = \iint_{S_2} (y^2, xy+z, z) \cdot (0,0,-1)\, dxdy = \iint_{S_2} -z\, dxdy = \{z=0 \text{ i } S_2\} = 0$

S_1
$\iiint_{\circledast} (z+1)\, dV = \iiint z\, dv + \iiint dV = \iiint z dV +$ Volym av halvboll med radie $1 = \iiint z dV + \frac{\frac{4\pi 1^2}{3}}{2} = \iiint z dV + \frac{2\pi}{3} = \{\text{första delen}\} =$

$\left\{ \begin{matrix} \text{Sfäriska} \\ \text{koordinater} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = r \cdot \cos\theta \sin\phi \\ y = r \cdot \sin\theta \sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix} \middle| dV = r^2 \sin\phi \cdot dr d\theta d\phi \right\} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r \cdot \cos\theta\, r^2 \sin\phi\, dr d\theta d\phi =$ bös

Svar: $\frac{11\pi}{12}$

5) a) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

Polära koordinater. $\begin{matrix} x=r\cdot\cos\theta \\ y=r\cdot\sin\theta \end{matrix}$ $\begin{matrix} 0\leqslant r\leqslant\infty \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{matrix}$ $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\infty} re^{-r^2}dr = \left\{\begin{matrix} r^2=u \\ du=2rdr \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} d\theta \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \pi$$

b) Låt $F=(2xy+z^3, x^2+2yz, y^3+3xz^2+1)$, konservativt. Hitta en potential.
Räkna sedan ut $\int F\cdot dr$ för kurvan som startar i $(0,0,0)$ & slutar i $(1,2,1)$

$$F=\nabla\phi \quad \begin{matrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy+z^3 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2+2yz \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\ y^2+3xz^2+1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \phi_x = x^2y+z^3x+C(y,z) \\ \phi_y = \cancel{x^2y}+y^2z+D(x,z) \\ \phi_z = \cancel{y^2z}+\cancel{xz^3}+z+E(x,y) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \phi = x^2y+z^3x+y^2z+z+F$$

$$\int F\cdot dr = \int_C \nabla\phi\cdot dr = \phi(1,2,1)-\phi(0,0,0) = 8$$

c) Beräkna arean av den del av $\overset{R}{\text{ytan}}$: $z=x^2+y^2+1$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2=9$.

$\iint_R dS = \left\{\begin{matrix} dS \text{ är ytarea-} \\ \text{elementet} \end{matrix}\right\}$ Vi behöver få fatt på dS och parametriseringen av ytan.

Parametrisering

Funktionsyta: $z=f(x,y)=x^2+y^2+1$
$x^2+y^2\leqslant 3^2$ G

dS

Funktionsyta: $dS=(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}dx\,dy = (1+4x^2+4y^2)^{1/2}dx\,dy = (1+4(x^2+y^2))\,dx\,dy$

$$\iint_R dS = \iint_G (1+4(x^2+y^2))^{1/2}dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{Polära} \\ \text{koordinater}\end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (1+4r^2)^{1/2}r\cdot dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 r\sqrt{1+4r^2}\,dr = \left\{\begin{matrix} u=1+4r^2 \\ du=8rdr \end{matrix}\middle|\begin{matrix} r=0\Rightarrow u=1 \\ r=3\Rightarrow u=37 \end{matrix}\right\} =$$

$$2\pi\int_1^{37}\sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{\pi}{6}(37^{3/2}-1)$$

2015-08-28, del 2

3) Betrakta vektorfältet $F=(y^2,-x^2)$ och beräkna arbetet som F utför längs randen, orienterad moturs, till den delen av enhetsdisken som ligger i kvadrant 1. Använd kurvintegral.

Randen består av 3 kurver ↓, →, ↰. (C_1, C_2, C_3)

Parametrisering

C_1: $r(t)=(t,0)$ $\quad 0\leqslant t\leqslant 1$
C_2: $r(t)=\cos(t), \sin(t)$ $\quad 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$
C_3: $r(t)=(0,1-t)$ $\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

C_2

$$\int_{C_2} F\,dr = \int_{C_2}(y^2,-x^2)(dx,dy) = \int_{C_2} y^2dx - x^2dy = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)(-\sin(t)-\cos^2(t)\cos(t)dt = -\int_0^{\pi/2}\sin^3(t)+\cos^3(t)dt = \{\text{Sinus}\} =$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3t\,dt = \int \sin(1-\cos^2)\,dt = \int \sin t - \sin t\cos^2 t\,dt = \{\sin\cos^2\} = \left\{\begin{matrix} u=\cos t \\ du=-\sin t\,dt \end{matrix}\right\} = \int u^2du$$