Elektriska kretsar

Storheter

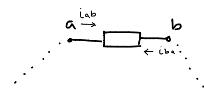
q: Elektrisk laddning.

i: Laddningar i rörelse, ström. Mängden elektrisk laddning, q, som per tidsenhet passerar en tvärsnittsyta i en ledare eller ett kretselement.
Ström betecknar per definition flöde av positiva laddningar.

Teckna en ström med:

* Ett värde (ofta en variabel)
* En riktning (referens)

Ex



i_{ab}: Laddningsflöde (positiva laddningar) per tidsenhet från a till b.
i_{ba}: Laddningsflöde (positiva laddningar) per tidsenhet från b till a.

Strömmarna i_{ab} och i_{ba} har samma storlek men olika riktning: Här är $i_{ab} = -i_{ba}$.

Specialfall

Konstanta strömmar i en krets kallas DC: "Direct Current".
Sinusformade strömmar i en krets kallas AC: "Alternating Current"

Samband mellan laddning och ström

$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} i(\tau)\,d\tau}_{q(0)} + \int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau + q(0)$$

Enheter

Elektrisk ström: Ampere [A] grundenhet
Elektrisk laddning: Coulomb [C], $1\,C = 1\,As$ (Amperesekund)

Spänning

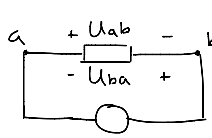
Den energi per laddningsenhet det erfodras för att transportera laddningar från en punkt i en elektrisk krets till en annan.

Beteckning: $u(t) = \frac{dw}{dq}$

u: Spänning i Volt.
w: Energin i Joule.
q: Laddning i Coulomb.

Teckna en spänning med:

* Ett värde (Variabel)
* Polaritet (referens)



u_{ab} är propirtionell mot den energi som krävs för att flytta laddning från punkt a till b.

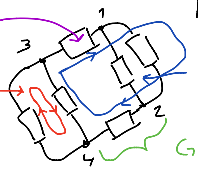
I vårt fall är $u_{ab} = -u_{ba}$.

Enhet i SI-systemet

Elektrisk spänning: Volt [V], $1V = 1\frac{J}{As}$

Termer och begrepp

Kretselement



Nod: Sammanbindningspunkt. ①, ②, ③, ④

Slinga: Varje sluten väg i en krets.

Maska

Gren. (Allt mellan nod 2 och 4.)

En slinga som ej omsluter någon gren.

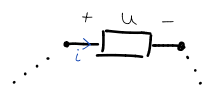
En gren består av kretselement med anslutningstrådar. Dessa trådar antas vara ideala (resistanslösa).

Referensriktningar

Referensriktningar för spänningar och strömmar måste anges innan kretsekvationerna tecknas.

Ex

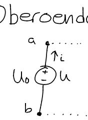
Referensriktningar på spänningar och strömmar kan väljas godtyckligt och oberoende av varandra.



Det kan vara praktiskt att använda sig av samordnade referensriktningar. Strömmen går in vid plus-tecknet hos spänningen. Detta är vad vi har i exemplet ovan.

Kretselement Ideala modeller

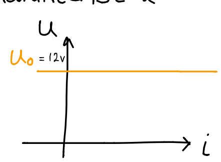
* Oberoende spänningskälla



U_0: är den spänning källan levererar, den är oberoende av strömmen i.
i : Vet vi inget om utan att veta hur resten av kretsen ser ut.

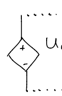
Spänning - Ström karakteristik

Ex: $U_0 = 12\,V$



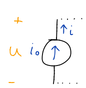
Att nollställa en oberoende spänningskälla innebär att $U_0 = 0$.
Detta är detsamma som kortslutning.

* Beroende spänningskälla



U_0: Beror på annan ström eller spänning i kretsen.

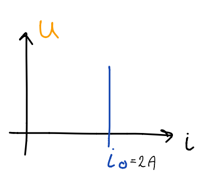
* Oberoende strömkälla



i_0: Den levererade strömmen av en oberoende källa. Oberoende av spänningen u.
u: Beror av utseendet hos övriga kretsen och behöver allt som oftast beräknas.

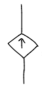
Karakteristik

Ex: $i_0 = 2A$

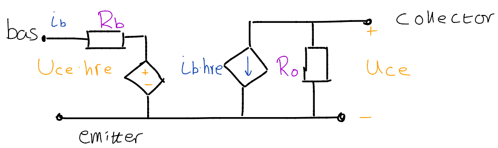


Att nollställa en oberoende strömkälla innebär att $i_0 = 0$ vilket är att jämföra med ett avbrott.

* Beroende strömkälla



i_0: Beror av en annan ström eller spänning i kretsen.

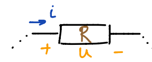


bas
ib
Rb
Uce·hre
ib·hre
Ro
Uce
+
−
collector
emitter

Kretselement fortsättning

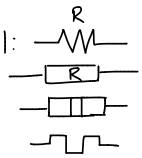
Resistans

Relationen mellan ström och spänning uppfyller ohm's lag.
Notera referensriktningen för ström och spänning.

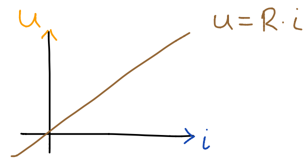


$\boxed{u = R \cdot i}$

Symbol:



Karakteristik:



Enhet: $[\Omega]$, ohm.
$1\Omega = 1\frac{V}{A}$

Konduktans

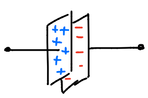
Enhet: $[S]$, Siemens
$G = \frac{1}{R}$

Kapacitans

Ett mått på ett kretselements förmåga att lagra energi i form av ett elektriskt fält (laddningar separeras).

Principiell uppbyggnad av en kondensator

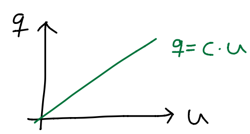
Plattor med dielektrikum emellan.



$\boxed{C = \frac{\varepsilon A}{d}}$

A = area
d = avstånd mellan plattor
ε = dielektricitets konst

Samband



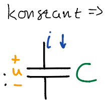
Eftersom $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ =>
$\frac{dq}{dt} = i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$
Alt: $u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + u(0)$
Strömmen är prop. mot spänningens tidsderivata.

Enhet: [F], Fahrad
$1F = 1\frac{C}{V}$ ← Coulomb

I DC-fallet

Om u är konstant => $i = 0$, ett avbrott.

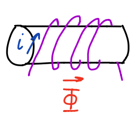
Symbol:



Induktans

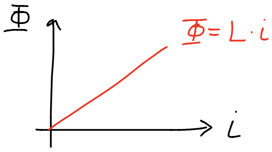
Ett mått på ett kretselementsförmåga att lagra energi i form av ett magnetiskt fält. Detta görs mha en spole.

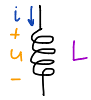
Principiell uppbyggnad av en spole



Φ: Magnetiskt flöde.
Induktansen beror av antalet varv (N) vi lindat, diametern på spolen samt arean.

Samband



Symbol: 

Enhet: $[L]$, Henry

$1H = 1\,\frac{Vs}{A}$

Vi önskar samband mellan i och u. Enligt Farraday's induktionslag gäller det att: $u = \frac{d\Phi}{dt}$ vilket ger: $\frac{d\Phi}{dt} = \boxed{u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}}$

alt: $i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)\,d\tau + i(0)$

Spänningen är alltså proportionerlig mot strömmens tidsderivata.

I DC-fallet

Om strömmen i är konstant => spänningen = 0. Induktansen betraktas då som en kortslutning.

I denna kurs behandlas enbart kretsar och kretselement som är linjära.

* Linjära (superpositionsprincipen gäller)

Alla relationer mellan ström och spänning kan beskrivas med linjära, ordinära, diff-ekvationer med konstanta koefficienter.

* Tidsinvarianta
* Icke distribuerade kretsar, dvs: våglängden hos sinussignalerna i våra kretsar är mycket större än kretsens dimensioner.

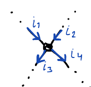
Ekvationer

Kirchoffs strömlag (KCL)

I varje nod är summan av alla grenströmmar lika med noll vid alla tidpunkter. $\sum_{nod} i_k = 0$, observera att referensriktningen bestämmer tecknet på i_k.

Alt 1:

Tecken	Ref. riktning
+	ut från nod
−	in mot nod

Ex: 

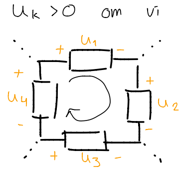
$-i_1 - i_2 + i_3 + i_4 = 0$

Alt 2: Gör tvärtom. Det viktiga är att man är konsekvent.

Kirchoffs spänningslag (KVL)

I varje slinga är summan av alla grenspänningar noll vid varje tidpunkt. $\sum_{slinga} u_k = 0$, observera att polariteten bestämmer tecknet på varje u_k i summan.

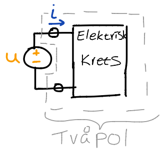
Låt $u_k > 0$ om vi vid "kretsvandring" först möter ett elements plustecken.

Ex: 

$u_1 + u_2 - u_3 - u_4 = 0$

Effekt

Effekt är detsamma som "energi per tidsenhet".



Ögonblicksvärdet av den effekt vilken förbrukas defineras som $p = u \cdot i$

W: Energi, arbete. alltså: $p = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i$, även här måste vi ta hänsyn till referensriktningarna

Samordnade ref. riktningar (strömmen in via plustecknet) $\Rightarrow p = u \cdot i$, annars $p = -u \cdot i$

Tolkning: $p > 0 \Rightarrow$ Tvåpolen förbrukar/upptar effekt.

$p < 0 \Rightarrow$ Tvåpolen avger/levererar effekt.

Enhet: [W], Watt

$1W = 1\frac{J}{s} = \frac{Nm}{s}$

Energi

Energin W som tillförs en krets i ett tidsintervall $t_0 \leq t \leq t_1$. $W = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\,dt$

Beräkningar

Likströmskretsar (DC-kretsar)

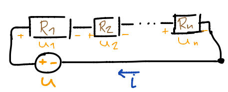
Vi behöver endast studera källor och resistanser ty induktans → "kortslutning"
kapacitans → "avbrott"

Beräkningsmetod

Utgå från KVL, KCL och Ohm's lag.

Förenkling av kretsar

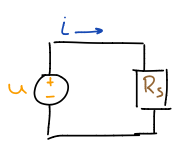
* Seriekoppling av resistanser.



KVL $\Rightarrow -u + u_1 + u_2 + \dots + u_n = 0$

Ohm's $\Rightarrow$ $u_1 = i \cdot R_1$, $u_2 = i \cdot R_2$, $\vdots$, $u_n = i \cdot R_n$ $\Big\}$ $u = i \cdot \underbrace{(R_1 + R_2 + \dots + R_n)}_{R_s}$

Ersättningsresistans vid seriekoppling $R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$ gör att vi kan skriva om kretsen ovan med bara en resistor.

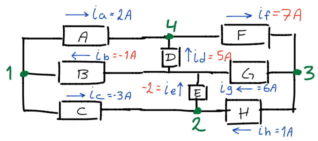


Notera: Vid seriekoppling går samma ström genom varje element.

Övningar som gås igenom

1.38
43
67
75
2.8

1.38

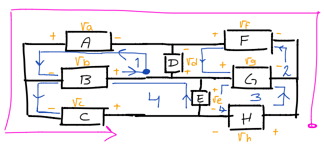


Bestäm strömmarnas värde givet: $i_a=2A$
$i_c=-3A$
$i_g=6A$
$i_h=1A$

Kirchhoffs current law: "Summan av de ingående strömmarna i en nod är lika med de utgående."
* Välj en nod med en obekant ström.

Nod 1: $i_b=i_a+i_c=2-3=-1A$
Nod 2: $i_c+i_h=i_e=-3+1=-2\ A$
Nod 3: $i_f=i_g+i_h=6+1=7A$
Nod 4: $i_d+i_a=i_f \Rightarrow i_d=i_f-i_a=7-2=5A$

1.43

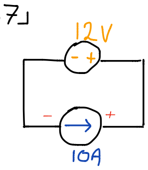


Bestäm alla spänningar givet: $v_a=10\ V$
$v_b=-3V$
$v_f=12V$
$v_h=5V$

Kirchhoffs voltage law: Summan av alla spänningar i en slinga är lika med noll!
* Bestäm en slinga och riktning. Om du "går in i +" adderar du. Annars subtraherar du.

Slinga 1: $v_d-v_a-v_b=0 \Rightarrow v_d=v_a+v_b=10-3=7V$
Slinga 2: $-v_f-v_d+v_g=0 \Rightarrow v_g=v_f+v_d=19V$
Slinga 3: $-v_g+v_e-v_h=0 \Rightarrow v_e=v_g+v_h=19+5=24\ V$
Slinga 4: $-v_e+v_b-v_c=0 \Rightarrow v_c=v_b-v_e=-3-24=-27\ V$
Kontrollslinga: $v_f-v_a-v_c-v_h=0$ $\quad 12-10-(-27)-5=0$

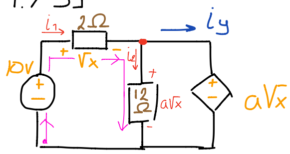
1.67



* Bestäm effekten i varje källa.
* Vilken källa absorberar/levererar effekt?

Effekten i spänningskällan: $P=i\cdot v$ ty samordnad refriktn. $P=10\cdot 12=120W$, $P>0 \Rightarrow$ absorberar
Effekten i strömkällan: KVL $\Rightarrow$ potential enligt bilden. Eftersom vi inte har samordnad ref.riktn får vi att $P=-i\cdot v \Rightarrow P=-10\cdot 12=-120\ W$, $P<0 \Rightarrow$ levererar

1.75



Givet

$a = 4$

Sökt

1. Vilken typ av kontrollerad källa finns?
2. V_x & i_y

1. $\pm$ => Spänningskälla, aV_x => spänningskontrollerad. Alltså: Spänningskontrollerad spänningskälla

2. Parallellkopplade spänningskällor har samma potential. Spänningen över resistorn med 12Ω har alltså samma potential som den spänningskontrollerade spänningskällan.

Slingan ger oss mha KVL => $-10 + V_x + aV_x = 0$

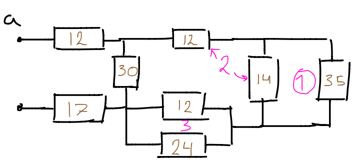
$$-10 + 5V_x = 0$$
$$5V_x = 10$$
$$V_x = 2$$

KCL och våra två inritade strömmar, samt Ohm's lag: $V = R \cdot i$ =>

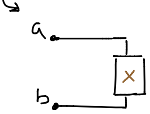
$V_x = 2 \cdot i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{2}{2} = 1A$

$aV_x = 12 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{4 \cdot 2}{12} = \frac{2}{3} A$ KCL => $i_1 = i_2 + i_y \Rightarrow i_y = i_1 - i_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} A$

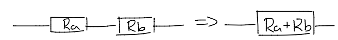
2.8



gör om till

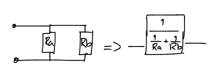


Seriekopplade resistanser

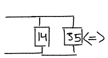


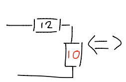
$R_{ekv} = Ra + Rb$

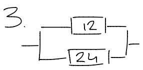
Parallellkopplade resistorer

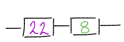


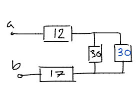
$\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{Ra} + \frac{1}{Rb} \Rightarrow R_{ekv} = \frac{1}{\frac{1}{Ra} + \frac{1}{Rb}} = \frac{RaRb}{Ra + Rb}$

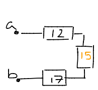
1.  <=> $\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{14} + \frac{1}{35} = 10\Omega$

2.  <=> $R_{ekv} = 12 + 10 = 22\,\Omega$

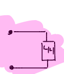
3.  => $\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 8\,\Omega$

4.  => $R_{ekv} = 30\ \Omega$

5.  => $\frac{1}{R_{ekv}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = 15\,\Omega$

6.  => $R_{ekv} = 12 + 17 + 15 = 44\,\Omega$

Svar



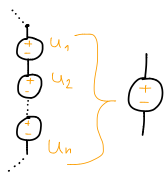
Beräkning av elektriska kretsar

KCL: $\sum_{nod} i_k = 0$, KVL: $\sum_{slinga} u_k = 0$, Ohm: $u = R \cdot i$, Effekt: $P = u \cdot i$

Reducering av likströmskretsar

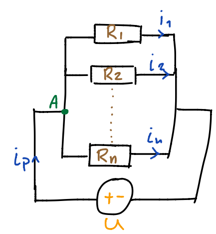
Kom ihåg att likström ⇔ DC.

Seriekoppling av spänningskällor



$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_k$

Parallellkoppling av resistanser



KCL_A: $i_p = i_1 + i_2 + \ldots + i_n$

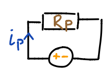
$u = R_1 \cdot i_1 = R_2 \cdot i_2 = \ldots = R_k \cdot i_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$

$i_k = \frac{u}{R_k} = u \cdot G_k$

$i_p = u \underbrace{(G_1 + G_2 + \ldots + G_n)}_{G_P = \sum_{k=1}^{n} G_k}$

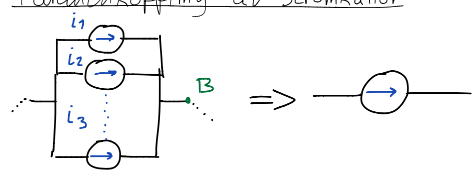
$G_P = \frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^{n} G_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$

Ersättningsresistansen R_P från parallellkoppling fås som. $\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$

Vi får alltså:  men detta

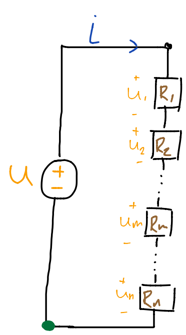
förutsätter att spänningen är den samma över alla resistorer.

Parallellkoppling av strömkällor



$i_s = \sum_{k=1}^{n} i_k$

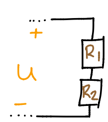
Spänningsdelning



Notera: Det är samma ström genom alla resistorer.

KVL: $u = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_m + \ldots + R_n) \Rightarrow i = \frac{u}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$

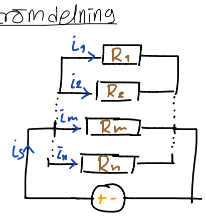
$u_m = i \cdot R_m = u \cdot \frac{R_m}{\sum_{k=1}^{n} R_k}$

För $n = 2 \Rightarrow$ 

$u_1 = u \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$u_2 = u \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Strömdelning

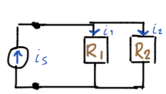


KCL: $i_s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + \ldots + i_n$

$i_m = \frac{u}{R_m} = u \cdot G_m$, där $\frac{1}{R} = G$, $m = 1, 2, m \ldots n$

$i_s = \underset{\frac{i_m}{G_m}}{u} \cdot \sum_{k=1}^{n} G_k = \frac{i_m}{G_m} \cdot \sum_{k=1}^{n} G_k$

$i_m = i_s \cdot \frac{G_m}{\sum_{k=1}^{n} G_k}$

För $n = 2$: 

$i_1 = i_s \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = i_s \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = i_s \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

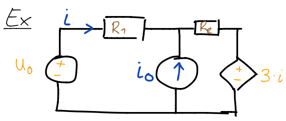
Notera bytet!

Superposition

Superposition kan appliceras på linjära kretsar och enligt föregående föreläsning är våra kretsar sådana.

I en linjär krets med oberoende källor kan varje grenspänning/grenström beräknas genom att summera bidragen från varje enskild **oberoende** källa då övriga **oberoende** källor **nollställs**. Om kretsen innehåller beroende källor så behålls dessa aktiva och tas med i beräkningarna på vanligt sätt i superpositionsberäkningen.

Ex

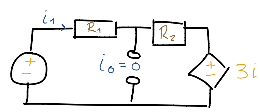


Givet
$R_1 = 3\Omega$
$R_2 = 2\Omega$
$i_0 = 7A$
$U_0 = 24V$

Sökt
i

Använd superposition.

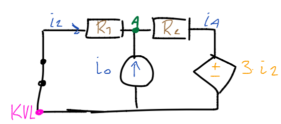
1. Nollställ strömkällan => $i_0 = 0$
   Sök bidrag från U_0.



KVL: $-U_0 + iR_1 + i \cdot R_2 + 3i_1 = 0$

$i_1 = \frac{U_0}{R_1+R_2+3} = \frac{24}{3+2+3} = 3A$

2. Nollställ spänningskällan => $U_0 = 0$
   Sök bidrag från i_0.



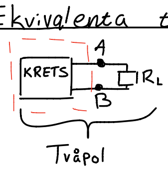
KCL_A: $i_2 + i_0 = i_A$

KVL: $i_2R_1 + \underbrace{(i_2+i_0)}_{i_A} \cdot R_2 + 3i_2 = 0$

$i_2(R_1 + R_2 + 3) = -i_0 \cdot R_2 \Rightarrow i_2 = -i_0 \frac{R_2}{R_1+R_2+3} = -\frac{7}{4} A$

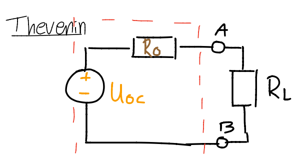
Superpositionsprincipen ger alltså: $i = i_1 + i_2 = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} A$

Ekvivalenta tvåpoler

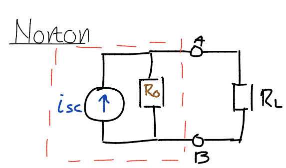


En godtycklig tvåpol uppbyggd av oberoende och beroende källor samt resistanser kan representeras av en ekvivalent tvåpol enligt:

Thevenin



Norton



U_{oc}: Tomgångsspänning mellan A och B => "$R_L = \infty$"
OC: Open Circuit

i_{sc}: Kortslutningsström mellan A och B => "$R_L = 0$"
SC: Short circuit

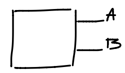
R_0: Tvåpolens inresistans sedd in från A och B med oberoende källor nollställda.

Den ursprungliga kretsen kan ersättas med Thevenins eller Nortons ekvivalenta tvåpol så att dess inverkan utåt på den övriga kretsen blir helt ekvivalent.
Då måste U_{oc} och i_{sc} vara lika i de ekvivalenta kretsarna.

Samband

Thevenin: $i_{sc} = \frac{U_{oc}}{R_0}$

Fortsätn: Beräkning av kretsar



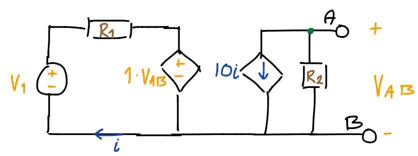
Ekvivalenta tvåpoler

Beräkningsgång: 1. Beräkna tomgångsspänning mellan polerna A & B. Obelastad tvåpol, $R_L = R_{AB} = \infty$

2. Kortslut vid polerna och beräkna kortslutningsströmmen i_{sc}. Strömmen skall motsvara den vi vill ha i Nortonmodellen.

3. Beräkna R_0. Resistansen sedd in från polerna med oberoende källor nollställda.

Ex Sök Nortons Ekv tvåpol för följande krets.



Givet
$R_1 = 500\,\Omega$
$R_2 = 25\,\Omega$
$V_1 = 5\,V$

Beräkning

Beräkna i_{sc} mellan A och B: KCL: $i_{sc} = -10i$ (Ingen spänning över R_2 => ingen ~~ström~~ genom R_2)

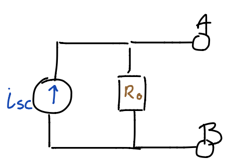
KVL: $-V_1 + i_1 R_1 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{5}{500} = \frac{1}{100}A$, $i_{sc} = -10i = -\frac{1}{10}A$

För att erhålla R_0 beräkna V_{oc}: KVL: $-V_1 + i_1 \cdot R_1 + V_{AB} = 0$
Ohm's lag: $V_{AB} = -10i \cdot R_2$

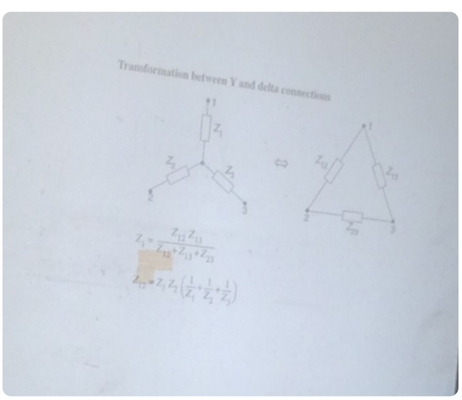
$$i = -\frac{V_{AB}}{10 R_2} \Rightarrow -V_{AB} \cdot \frac{R_1}{10 \cdot R_2} + V_{AB} = V_1 \Rightarrow V_{AB}\left(1 - \frac{R_1}{10 \cdot R_2}\right) = V_1 \Rightarrow$$

$$V_{AB} = \frac{V_1}{\left(1 - \frac{R_1}{10R_2}\right)} = -5\,V$$

$$R_0 = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = \frac{V_{AB}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-0{,}1} = 50\,\Omega$$



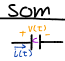
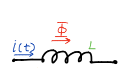
Transformation between Y and Delta



Mask & Nodanalys

Kika i det flashiga kompendiet på:
https://pingpong.chalmers.se/courseId/3869/node.do?id=1812178&ts=1395909979850&u=1816811702

Strömmar och spänningar som varierar över tid

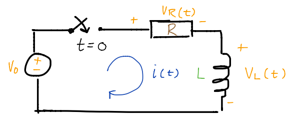
Studera kretsar med kapacitanser  och induktanser 

$q = C \cdot V$,
$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$ alt: $V(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + V(0)$

$\phi = L \cdot i$
$V(t) = \frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ alt: $i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t V(\tau)\,d\tau + i(0)$

Första ordningens krets

Ex "RL-Krets"



Beräkna strömmar och spänningar i kretsen då $t \geq 0$. Brytaren sluts vid $t=0$.

$V_0 =$ konst.

$t \geq 0$, KVL: $\begin{cases} -V_0 + i(t)\cdot R + V_L(t) = 0 \\ V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$

$i(t)\cdot R + L\cdot\frac{di(t)}{dt} = V_0$ är en första ordningens diff.ekv. och kan skrivas om:

$i(t) + \frac{L}{R}\cdot\frac{di(t)}{dt} = \frac{V_0}{R}$

Lösning

Homogen lösning: $i(t) + \frac{L}{R}\cdot\frac{di(t)}{dt} = 0$

Sätt $i_h(t) = k\cdot e^{st}$, insättning ger $\Rightarrow k e^{st} + \frac{L}{R}\cdot k s e^{st} = k e^{st}\left(1 + \frac{L}{R} s\right) = 0$

Icke trivial lösning: $(k \neq 0) \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$

$i_h(t) = k e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = k e^{-\frac{t}{\tau}}$ där $\tau = \frac{R}{L}$, tidskonstant i sekunder.

Partikulärlösning: Ansätt $i_p(t)$ på samma (men allmän) form som den drivande, oberoende, storheten.

Här är V_0 konst.

Sätt: $i_p(t) = k_p$

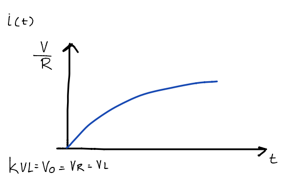
$i(t) = k e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + k_p$

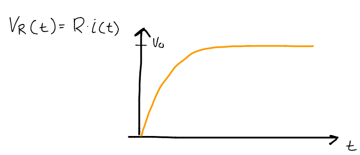
För $t=0$, slutaren bryts och $i(0)=0$, begynnelsevärdet.

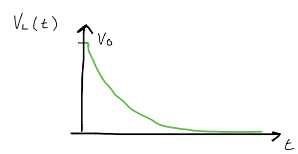
$i(0) = k e^{0} + k_p = k + k_p = 0 \Leftrightarrow k = -k_p$

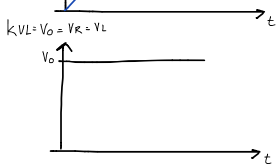
Då $t \to \infty$ (DC-fall) får vi $V_L(t) = 0$ ty $\frac{di(t)}{dt} \to 0 \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R}$

$i(t)\big|_{t\to\infty} = k\left(e^{-\frac{R}{L}\cdot t} - 1\right) = -k = \frac{V_0}{R}$ och $i(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right),\ t \geq 0$

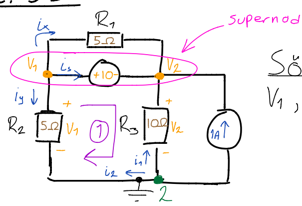








2.53



Sökt
V_1, V_2, i_s

Beräkning
2 obekanta ⇒ vi behöver två oberoende ekvationer.
Leta efter en supernod. En supernod gör det enkelt att hitta en ekv.
Placera ut potentialen över resistorerna 2 & 3.
KVL i 1: $+10+V_2-V_1=0 \Leftrightarrow V_1-V_2=10$, detta gör att se direkt av supernoden.

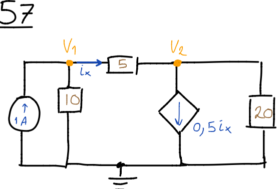
Använd nodanalys för att hitta den andra ekvationen.
KCL i 2: $1+\underbrace{\frac{0-V_2}{10}}_{i_2}+\underbrace{\frac{0-V_1}{5}}_{i_1}=0 \Rightarrow 1-\frac{V_2}{10}-\frac{V_1}{5}=0 \Leftrightarrow \frac{10}{10}-\frac{V_2}{10}-\frac{2V_1}{10}=0 \Leftrightarrow 10=V_2+2V_1$

$V_1-V_2=10 \Rightarrow V_2=V_1-10$
$2V_1+V_2=10 = 2V_1+V_1-10=10 \Leftrightarrow 3V_1=20 \Leftrightarrow V_1=\frac{20}{3} \Rightarrow V_2=\frac{20}{3}-\frac{30}{3}=\frac{-10}{3}$

$V_1=\frac{20}{3}$
$V_2=\frac{-10}{3}$

Finn i_s
KCL i V_1: $i_x+i_s+i_y=0$
$i_x=\frac{V_1-V_2}{R_1}=\frac{10}{5}=2$
$i_y=\frac{V_1}{5}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}$
$\Big\}\ i_s=-\frac{4}{3}-2=-\frac{10}{3}A$

2.57



Sökt
V_1, V_2, i_x

Beräkning
KCL i V_1: $\frac{V_1-V_2}{5}+\frac{V_1-0}{10}+(-1)=0 \Leftrightarrow \frac{2(V_1-V_2)}{10}+\frac{V_1}{10}-\frac{10}{10}=0 \Leftrightarrow 2V_1-2V_2+V_1=10 \Leftrightarrow 3V_1-2V_2=10$
KCL i V_2: $\frac{V_2-0}{20}+0{,}5\cdot i_x+\frac{V_2-V_1}{5}=0 \Leftrightarrow V_2+10\cdot i_x+4(V_2-V_1)=0 \Leftrightarrow 5V_2+10i_x-4V_1=0$
Ohm's lag: $i_x=\frac{V_1-V_2}{5}$

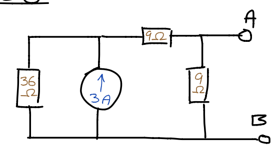
$5V_2+2V_1-2V_2-4V_1=0 \Leftrightarrow \begin{matrix}3V_1-2V_2=10\\ 3V_2-2V_1=0\end{matrix} \Rightarrow V_2=\frac{2V_1}{3}$

$3V_1-\frac{4V_1}{3}=10 \Leftrightarrow 9V_1-4V_1=30 \Leftrightarrow 5V_1=30 \Leftrightarrow V_1=6 \Rightarrow V_2=\frac{12}{3}=4$

$V_1=6\ V$
$V_2=4\ V$

$i_x=\frac{6-4}{5}=\frac{2}{5}A$

2.86

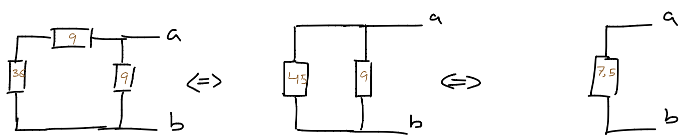


Sökt
Norton och Thévenin

Notis: $V_T = V_{oc}$
$I_N = i_{sc}$

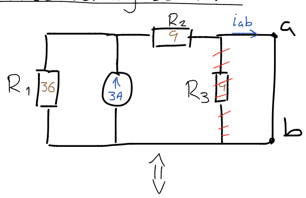
Beräkning

Inga beroende källor. Ta fram R_N genom att nollställa strömkällan.

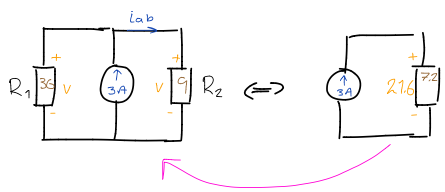


$R_n = 7.5\ \Omega$

Kortslutningsströmmen



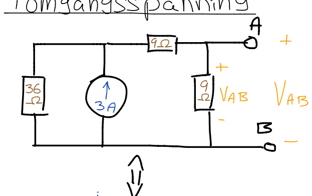
Eftersom det inte kommer gå någon ström genom R_3 kan vi ta bort den grenen.



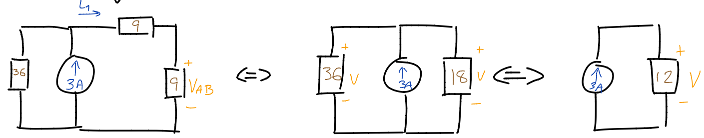
$R_1 // R_2 \Rightarrow R_{tot} = 7.2\ \Omega$
$V = 3 \cdot 7{,}2 = 21.6\ V$

$i_{ab} = \frac{21.6}{9} = 2.4A$

Tomgångsspänning



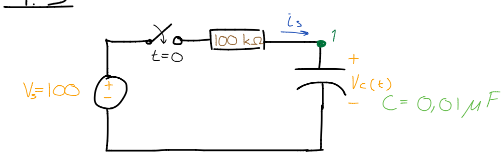
Vi kommer inte ha någon ström mot terminal A ty kretsen är öppen.



$V = 3 \cdot 12 = 36\ V$
$18 // 36 \Rightarrow$ Samma spänning.

$i_1 = \frac{V}{9+9} = \frac{36}{18} = 2A$
$V_{AB} = 2 \cdot 9 = 18\ V$
$V_T = R_N \cdot I_N$
$R_N = \frac{V_T}{I_N} = \frac{18}{24} = 7.5\ \Omega$

4.3



Givet

$R = 100\ k\Omega$

$V_S = 100\ V$

$C = 0{,}01 \cdot 10^{-6}\ F$

$V_c(0) = 0$

Sökt

Hur beor $V_c(t)$ av t?

Beräkning

Inför is och nod 1.

$$\frac{V_S - V_c(t)}{R} = C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt}$$

$\Leftrightarrow$

$$V_S - V_c(t) = R \cdot C \frac{dV_c(t)}{dt}$$

$\Leftrightarrow$

$$RC \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s \quad \text{1a ordningens diff ekv}$$

$$V_c(t) = V_c(t)_p + V_c(t)$$

Homogena lösningen

$$R \cdot C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = 0$$

Ansätt: $V_c(t) = k_1 \cdot e^{-St}$

$$RC \cdot \cancel{k_1} (\cdot s) e^{-St} + \cancel{k_1} e^{-St} = 0 \Leftrightarrow e^{-St}(-RCS + 1) = 0 \Leftrightarrow -RCS = -1 \Leftrightarrow S = \frac{-1}{-RC} = \frac{1}{RC}$$

$$V_c(t) = k_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Partikulärlösning

$$RC \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s$$

V_s är konstant $\Rightarrow$ ansätt $V_c(t) = k_2$, $(V_c(t))' = 0 \Rightarrow 0 + k_2 = V_s$

$$V_c(t) = V_s + k_1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

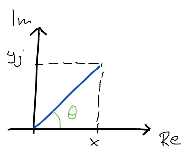
Med hjälp av initialvärdena finner vi k_1.

$$V_c(0) = V_s + k_1 e^0 = V_s + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -V_s$$

Svar: $V_s - V_s \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

Växelström

Komplexa tal



$j^2 = -1$

$Z = x + yj = |Z| e^{j\theta}$

$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180, \quad x < 0$

$x = |Z| \cdot \cos(\theta)$

$y = |Z| \cdot \sin(\theta)$

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$Ae^{j\theta} = A\cos\theta + Aj\sin\theta$

Växelströmskretsar

Vi studerar sinusformade signaler (strömmar och spänningar).

$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$ där $y(t)$ är entydigt bestämd av Y_m, ω och ϕ.

$y(t)$: Momentanvärde (ögonblicksvärde)

Y_m : Amplitud

ω : Vinkelfrekvens [rad/s]

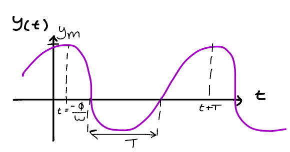
ϕ : Fasvinkel (argument)

Vidare har vi följande parametrar:

T : Periodtid $y(t) = y(t+T)$

f : Frekvens [Hz], $T = \frac{1}{f}$

$2\pi f = \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

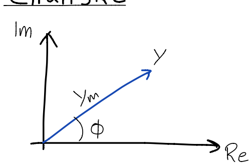


Den sinusformade signalen $y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$ kan representeras av ett komplext tal, en visare, enligt $Y = Y_m \cdot e^{j\phi}$

$Y \in \mathbb{C}$

$Y_m, \varphi \in \mathbb{R}$

Grafiskt



Förenklat skrivsätt: $Y = Y_m\angle\phi = Y_m \cdot e^{j\phi}$

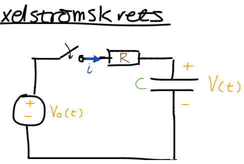
Samband mellan $y(t)$ och Y: $\underline{y(t)} = Re\{\underline{Y} \cdot e^{j\omega t}\} = Re\{Y_m \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\} = Re\{Y_m \cdot e^{j(\omega t+\phi)}\} = Re\{Y_m \cdot \cos(\omega t + \phi) + j \cdot Y_m \sin(\omega t + \phi)\} =$
$Y_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$

Vi skriver: $y(t) \rightleftharpoons Y$

Exempel

En spänning: $v(t) = 10 \cdot \cos(\omega t + 45°) \Rightarrow V = 10\angle 45°$

Växelströmskrets



$V_0 = V_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) \qquad V, t > 0$

$V(t) = 0, \quad t < 0$

KVL : , $t>0$

$$\begin{cases} -V_0 + R\cdot i + V = 0 \\ i = C\cdot \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$-V_0 + RC\frac{dv}{dt} + V = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\cdot V = \frac{1}{RC}\cdot V_0 = \frac{V_m}{RC}\cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Lösning

$V = V_h + V_p$, en diff.ekv. av första ordningen.

└ Partikulär-/stationär lösning

└ Homogenlösning. Ger initialt transient förlopp. $\to 0$ då $t \to \infty$. Den klingar av "väldigt fort".

Vi är, just nu, enbart intresserade av stationärlösningen då insvängningsförloppen (transienter) har klingat av.

Allmänt fall

Elektriska växelströmskretsar kan beskrivas med ordinära, linjära, differentialekvationer med konstanta koefficienter.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 \cdot y = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

y: Sökt ström eller spänning

HL: Bestäms av de oberoende källorna i kretsen.

Summan av ett godtyckligt antal sinusformade signaler, alla med samma vinkelfrekvens $= \omega$, och deras derivator är också en sinusformad signal med vinkelfrekvens ω.

Hänvisning till trigonometriska formler och deriveringsregler för $\sin(\omega t)$ & $\cos(\omega t)$.

$\therefore$ VL : En sinusformad signal.

"Lösningen" reduceras till att finna amplitud och fas hos signalen $y(t)$ - stationära lösningen. Detta gör vi mha $j\omega$-metoden

Inför visare: $y(t) \rightleftharpoons Y$

$$x(t) \rightleftharpoons X = X_m \angle \varphi$$

Transformering av derivator

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Re\{Y\cdot e^{j\omega t}\}\right) = Re\{j\omega \cdot Y e^{j\omega t}\}$$

Jämför: $y(t) = Re\{Y\cdot e^{j\omega t}\}$

Alltså: $\frac{dy(t)}{dt} \rightleftharpoons j\omega Y$

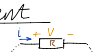
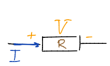
På samma sätt: $\frac{d^n y(t)}{dt^n} \rightleftharpoons (j\omega)^n \cdot Y$

Transformera diff.ekv: $[a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0]\, Y = X_m \angle \varphi$

$$Y = \frac{X_m \angle \varphi}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0} = Y_m \angle \phi \implies y(t) = Y_m \cos(\omega t + \phi)$$

Vi behöver ej ta fram någon diff.ekv. utan kan istället $j\omega$-transformera direkt.

Kretselement

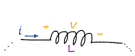
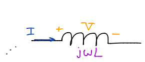
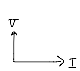
Resistans:  =>  Med visardiagram:

$V = R\cdot i$

$v(t) \rightleftharpoons V$

$i(t) \rightleftharpoons I$

Transformera relationen: $V = R\cdot I$

Induktans:  =>  , med visardiagram: 

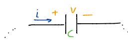
$V(t) = L\cdot \frac{di(t)}{dt}$

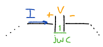
Transformera samband

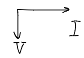
$v(t) \rightleftharpoons V$

$\frac{di(t)}{dt} \rightleftharpoons j\omega I$, där $i(t) \rightleftharpoons I$

Transformation: $V = j\omega L \cdot I$

Kapacitans: 

=> 

Med visardiagram: 

$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$

$i(t) \rightleftharpoons I$

$v(t) \rightleftharpoons V$

Transformera samband

$I = C \cdot jw \cdot V \iff V = \frac{1}{jwC} \cdot I$ och

Källor

Vi antar att alla källor är sinusformade med samma vinkelfrekvens − ω.

Exempel

Spänningskälla: $V_0(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \phi_v)$

$V_0(t) \rightleftharpoons V_0 = V_m \angle \phi_v$

Strömkälla: $i_0(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \phi_I)$

$i_0(t) \rightleftharpoons I_m \angle \phi_I$

Beräkningsmetoder

* Transformera kretsar till komplex form.
* Analysera / beräkna med samma metoder som vid likströmskretsar.

Beräkning av växelströmsnät

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\{V_m \cdot e^{j(\omega t+\theta)}\}$

forts. jω-metoden

KVL & jω: För en sluten slinga i en krets, summera alla grenspänningar. $v_1(t) + v_2(t) + \ldots + v_n(t) = 0$, $\forall t$

För stationära, sinusformade, signaler: $V_{m1} \cos(\omega t + \theta_1) + V_{m2} \cos(\omega t + \theta_2) + \ldots + V_{mn} \cos(\omega t + \theta_n) = 0$

$$\mathrm{Re}\{V_{m1} \cdot e^{j(\omega t+\theta_1)}\} + \ldots + \mathrm{Re}\{V_{mn} \cdot e^{j(\omega t+\theta_n)}\} = 0$$

$$\mathrm{Re}\{(V_{m1} \cdot e^{j\theta_1} + \ldots + V_{mn} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}\} = 0$$

För att ekv ska vara lika med noll krävs att det som står innanför parentesen är lika med noll ty $e^{j\omega t}$ är INTE 0 för $\forall t$.

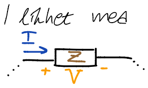
$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = 0 \quad \text{(KVL med jω-metoden)}$$

KCL & jω: Följer samma resonemang som KVL.

$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = 0$ i en nod, där $i_k(t) = I_{mk} \cdot \cos(\omega t + \theta_k)$ och $i_k(t) \rightleftharpoons I_k$

Impedans, Z

I likhet med Ohm's lag för resistanser definieras impedans som $V = Z \cdot I$ och $Z = \frac{V}{I}$ där $V \rightleftharpoons v(t)$ & $I \rightleftharpoons i(t)$.



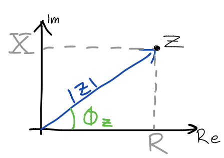
$V = Z \cdot I$ är ohm's lag för AC-kretsar.

$V = V_m \angle \phi_v$ och $I = I_m \angle \phi_I$

För $Z = \frac{V_m \angle \phi_v}{I_m \angle \phi_I} = |Z| \angle \phi_z$, där $|Z| = \frac{V_m}{I_m}$ och $\phi_z = \phi_v - \phi_I$

Impedanser, Z, transformeras INTE tillbaka till tidsdomänen. Detta saknar mening.

Grafisk beskrivning



Några impedanser

	Impedans (Z)	Reaktans (X)
Resistans: $V = R \cdot I$	R	0
Induktans: $V = j\omega L \cdot I$	$j\omega L$	ωL
Kapacitans: $V = \frac{1}{j\omega C} \cdot I$	$\frac{1}{j\omega C}$	$-\frac{1}{\omega C}$

Admittans, Y

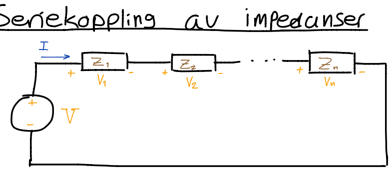
$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z| \angle \phi_z} = |Y| \angle \phi_y$

Om $Z = R + jX$: $Y = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{(R+jX)(R-jX)} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = G + jB$

$G = \frac{R}{R^2+X^2}$ Konduktans

$B = \frac{-X}{R^2+X^2}$ Susceptans

Seriekoppling av impedanser

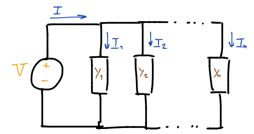


KVL: $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$

Vi har samma ström genom varje impedans.

$V = I \underbrace{(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n)}_{Z_{EQ}} = I \cdot Z_{EQ}$, $Z_{EQ} = \sum_{k=1}^{n} Z_k$

Parallellkoppling av admitanser



KCL: $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$

Vi har samma spänning över alla admitanser.

$I_m = V \cdot Y_m \quad , \; m = 1 \ldots n$

$I = V \underbrace{(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)}_{Y_{EQ}} = V \cdot Y_{EQ} \quad , \; Y_{EQ} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$

Alternativt: $\frac{1}{Z_{EQ}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{Z_k}$

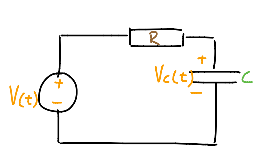
För $n=2$: $Z_{EQ} = \frac{1}{Y_{EQ}} = \frac{1}{Y_1 + Y_2} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)^{-1} = \ldots = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$, jämför med resistorer

Conclusion

Eftersom följande samband gäller efter transformation enligt jω-metoden: KVL, KCL, $V = Z \cdot I$, kan följande metoder som används vid DC-kretsar även användas på AC-kretsar:

- Maskanalys
- Nodanalys
- Spänningsdelning
- Strömdelning
- Superposition
- Ekvivalenta tvåpoler
- ΔY- transformation

Exempel



Givet

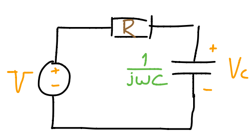
$V(t) = A \cdot \cos(\omega t)$

Sökt

$V_c(t)$

Lösning

jω-tranformering



$V(t) = A \cdot \cos(\omega t) \rightleftharpoons V = A\angle 0$

Spänningsdelning: $V_c = V \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC}$

Studera: $\frac{1}{j\omega RC}$

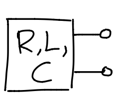
Belopp: $\left|\frac{1}{1 + j\omega RC}\right| = \sqrt{\frac{1}{1^2 + j\omega RC^2}}$

Argument, $\phi_{RC} = \arg\left\{\frac{1}{1 + j\omega RC}\right\} = -\arctan(\omega RC)$

$V_c = V \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + j\omega RC^2}} \cdot e^{j\phi_{RC}} = \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot e^{j\phi_{RC}}$

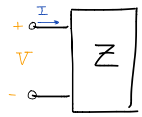
Åter till tidsdomän: $V_c(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \cos(\omega t + \phi_{RC})$ Volt

Passiv tvåpol



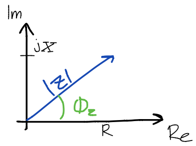
En passiv tvåpol är en krets uppbyggd av kretselementen R,L,C (alltså inga källor).

Transformering ($j\omega$)



Impedans: $Z = \frac{V}{I}$, $Z = R + jX$

Passiv tvåpol, $R \geq 0$

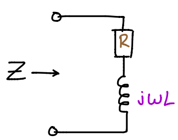


$-90° \leq \phi_Z \leq 90°$

Allmänt: $Z = Z(j\omega) \Rightarrow$ frekvensberoende

Egenskaperna hos en passiv tvåpol belyses ofta med $|Z|$ och $\arg\{Z\} = \phi_Z$ som funktion av vinkelfrekvensen ω.

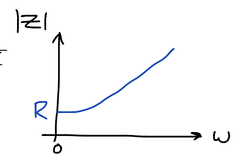
Exempel, RL-Krets

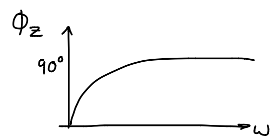


$Z = R + j\omega L = R + jX$

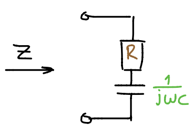
$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$\phi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$





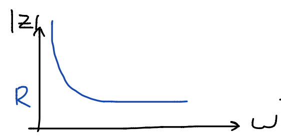
Exempel, RC-Krets

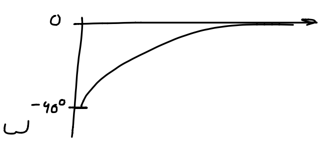


$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$

$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$

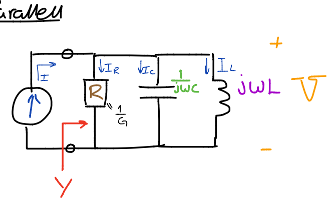
$\phi_Z = -\arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$





Resonanskretsar

Parallell



$Y_{EQ} = Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k = j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G$

$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB$

$\mathrm{Re}\{Y\} = G$, konst

$\mathrm{Im}\{Y\} = \omega C - \frac{1}{\omega L} = B(\omega)$, frekvensberoende

$B = 0$ för $\omega = \omega_0$ Resonans!

$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Resonansvinkelfrekvens

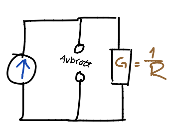
$I_C = V \cdot j\omega C = \{\omega = \omega_0\} = j\frac{VC}{\sqrt{LC}} = jV\sqrt{\frac{C}{L}}$

$I_L = V \cdot \frac{1}{j\omega L} = \{\omega = \omega_0\} = -j \cdot V \cdot \frac{\sqrt{LC}}{L} = -j \cdot V \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$

$I = I_L + I_C + I_R$ och $I_L = -I_C \Rightarrow I = I_R$ men $I_L, I_C \neq 0$.

I_L och I_C kan vara betydligt större än I_R (I). I_L och I_C är alltid lika stora men ur fas med π rad / 180°.

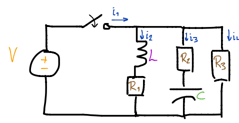
Ekvivalent krets (sedd utifrån) vid resonans



Uppgifter

4,23
5,49
5,53
5,50
5,69

4,23



Givet

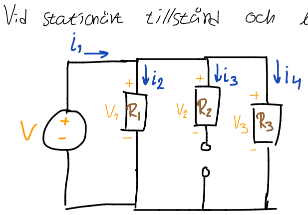
$V = 100\ V$
$L = 1\ H$
$C = 100 \cdot 10^{-6}\ F$
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 500\ \Omega$
$R_3 = 50\ \Omega$

Sökt

i_1, i_2, i_3, i_4 efter stängning av switch och vi nått stationärt tillstånd.

Lösning

Vid stationärt tillstånd och likström kommer kondensatorn bete sig som ett avbrott och spolen som en kortslutning.

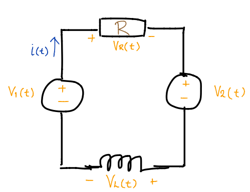


Avbrott $\Rightarrow i_3 = 0$

Parallellkoppling $\Rightarrow V = V_1 = V_3 \Rightarrow i_2 = \frac{V_2}{R_2} = 1A \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3 + i_4 = 1 + 0 + 2 = 3A$

$i_4 = \frac{V_3}{R_3} = 2A$

5,49



Givet

$V_1(t) = 100 \cdot \sin(100t)$
$V_2(t) = 100 \cdot \cos(100t + 90°)$

Sökt

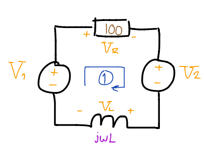
Phasors: $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_R, \bar{V}_L, I$
Rita phasors diagram
Vad är fasrelationen mellan I och $\bar{V}_1$ samt I och $\bar{V}_L$.

Lösning

$V_1(t) = 100 \cdot \sin(100t) = 100 \cos(100t - 90°) \rightleftharpoons \bar{V}_1 = 100 \angle{-90°}$

$V_2(t) = 100 \cos(100t + 90°) \rightleftharpoons \bar{V}_2 = 100 \angle{90°}$

För att finna $\bar{V}_L$ och $\bar{V}_R$ beräknar vi impedansen.



KVL i 1: $-\bar{V}_1 + 100 \cdot I + \bar{V}_2 + j \cdot 100 \cdot 1 \cdot I = 0$

$\bar{V}_1 - \bar{V}_2 = I(100 + 100j)$

$I = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{100 + 100j} = \frac{-j \cdot 100 - j \cdot 100}{100 + 100j} = \frac{-2j}{1+j}$

$= \frac{2\angle{-90°}}{\sqrt{2}\angle{45°}} = \sqrt{2}\angle{-135°}$

$\bar{V}_1 = 100(\cos(-90) + j \cdot \sin(-90)) = -100 \cdot j$

$\bar{V}_2 = 100(\cos(90) + j \cdot \sin(90)) = 100 \cdot j$

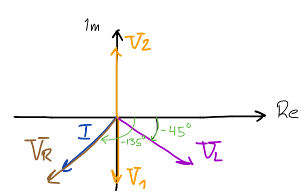
Noss

$\frac{a_1 \angle{\varphi_1}}{a_2 \angle{\varphi_2}} = \frac{a_1}{a_2} \angle{\varphi_1 - \varphi_2}$

$a_1 \angle{\varphi_1} \cdot a_2 \angle{\varphi_2} = a_1 a_2 \angle{\varphi_1 + \varphi_2}$

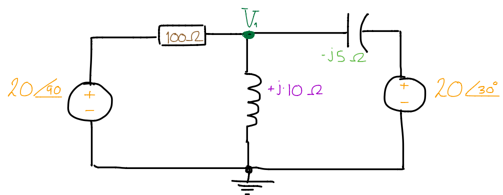
$\bar{V}_R = 100 \cdot \sqrt{2} \angle{-135°}$

$\bar{V}_L = j \cdot 100 \sqrt{2} \angle{-135°} = 100 \angle{90°} \cdot \sqrt{2} \angle{-135°} = 100 \cdot \sqrt{2} \angle{-45°}$



Fasrelation: I och $\bar{V}_1$, I lags $\bar{V}_1$ by 45°
I och $\bar{V}_L$, I lags $\bar{V}_L$ by 90°

5,53



Givet: Bild

Sökt: V_1

Lösning

Nodanalys: $\frac{V_1 - 20\angle 90}{100} + \frac{V_1 - 0}{j10} + \frac{V_1 - 20\angle 30}{-j5} = 0$

$V_1 - 20\angle 90 + \frac{10V_1}{j} - \frac{20(V_1 - 20\angle 30)}{j} = 0$

$V_1 - 20\angle 90 - j10V_1 + j20(V_1 - 20\angle 30) = 0$

$V_1(1 - j10 + j20) - 20\angle 90 - j20 \cdot 20\angle 30 = 0$ $\quad 20(\cos(30) + j\sin(30)) = 20(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2})$

$V_1(1 + j10) - j20 - j20(20(\cos(30) + j\sin(30)))$

$V_1(1 + j10) - j20 - j20(20(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{20})) = 0$

$V_1(1 + j10) - j20 - j400(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) = 0$

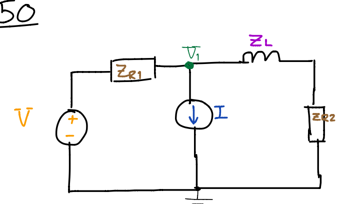
$V_1(1 + j10) - j20 - j200\sqrt{3} + 200 = 0$

$V_1(1 + j10) - j(20 + 200\sqrt{3}) + 200 = 0$

$V_1(1 + j10) = -200 + j(20 + 200\sqrt{3})$

$V_1 = \frac{-200 + j(20 + 200\sqrt{3})}{1 + j10} = \frac{(1 - j10)(-200 + j(20 + 200\sqrt{3}))}{(1 - j10)(1 + j10)} \approx \frac{3460 + j2366}{101} \approx 346 + j237$

5,50



Givet

$V = 20\angle 90°$

$Z_{R1} = 5\Omega$

$Z_{R2} = 5\Omega$

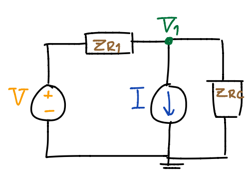
$Z_L = j5\Omega$

$I = 3\angle 0°$

Sökt

V_1

Lösning



$Z_{RC} = 5 + j5$

Nodanalys: $\frac{V_1 - 20\angle 90}{5} + 3\angle 0 + \frac{V_1 - 0}{5 + j5} = 0$

$V_1 - 20\angle 90 + 15\angle 0 + \frac{V_1}{1+j} = 0$

$V_1 - 20\angle 90 + 15\angle 0 + \frac{V_1(1-j)}{(1-j)(1+j)} = 0$

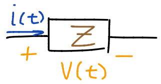
$V_1 - 20\angle 90 + 15\angle 0 + \frac{V_1(1-j)}{2} = 0$

$2V_1 - 40\angle 90 + 30\angle 0 + V_1(1-j) = 0$

$V_1(3-j) - j40 + 30 = 0$

$V_1 = \frac{(-30 + j40)(3+j)}{(3-j)(3+j)} = \frac{(-30 + j40)(3+j)}{10} = (-3 + j4)(3+j) = -13 + j9$

5.69



Givet

$V(t) = 10^4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + 75^\circ)$

$i(t) = 25\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + 30^\circ)$

Sökt

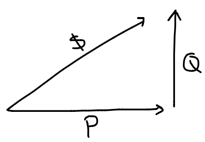
Komplex effekt	\$
Effektfaktor	φ
Reaktiv effekt	Q
Aktiv effekt	P
Skenbar effekt	S

Lösning

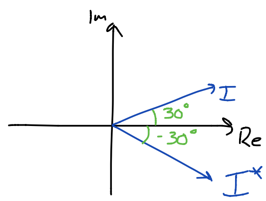
$V = 10^4 \cdot \sqrt{2} \angle 75^\circ$

$I = 25 \cdot \sqrt{2} \angle 30^\circ$

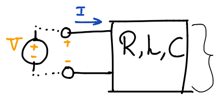
$S = |\$|$



$\$ = V \cdot I^*$ ← komplexkonjugat



Frekvensberoende impedanser

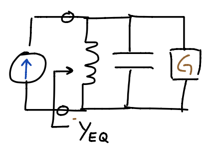


Passiv tvåpol.

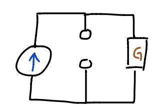
$V = Z I$

$Z = Z(j\omega) = \frac{V}{I}$

Parallellresonanskrets

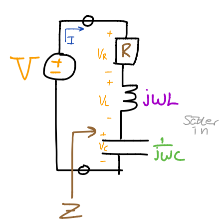


Vid resonans blir $Y_{EQ} = G$. Utifrån sett ser kretsen ut som



$I_L \neq 0, I_C \neq 0, \quad I_L = -I_C$

Serieresonanskrets



$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$

Vid $\omega = \omega_0$ sägs kretsen vara i resonans. Definitionsmässigt innebär det att $\text{im}\{Z\} = 0$.

Sätter in

$Z(j\omega)\Big|_{\omega=\omega_0} = R, \quad \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \longrightarrow$ resonansvinkelfrekvens

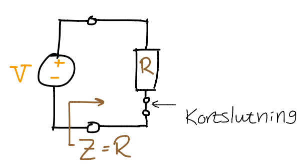
$V_L = I \cdot j\omega L = \{\omega = \omega_0\} = jI\frac{L}{\sqrt{LC}} = jI\sqrt{\frac{L}{C}}$

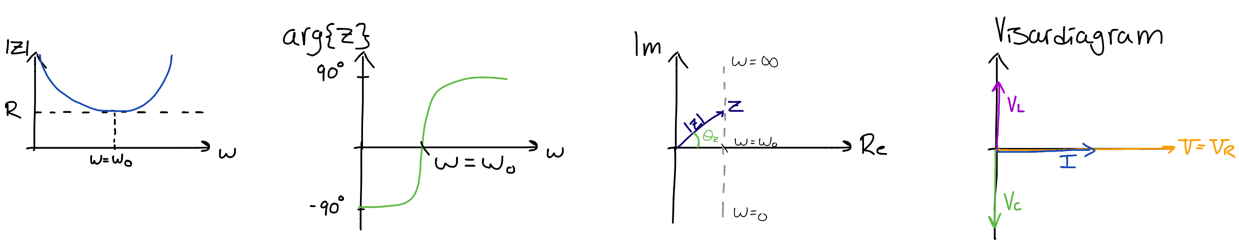
$V_C = I \cdot \frac{1}{j\omega C} = \{\omega = \omega_0\} = -jI\frac{\sqrt{LC}}{C} = -jI\sqrt{\frac{L}{C}}$

Notera: $V_L \neq 0, V_C \neq 0, \quad V_L + V_C = 0$

$|V_L| = |V_C|$ men de är ur fas med $180°$.

Ekvivalent krets vid resonans



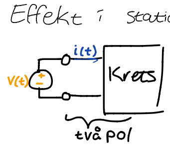


Växelström & Effekt

Repetition växelströmseffekt

Effekt i stationära AC-kretsar

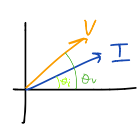
Notera: Sammordnade referensriktningar hos tvåpolen.



Momentana värdet av den effekt kretsen (tvåpolen) mottager är $p(t) = v(t) \cdot i(t)$

Vid sinusformad växelström: $v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v)$ Volt

$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i)$ Ampere



Låt strömmen i utgöra riktfas. [Låt $i(t)$ ha sitt maxvärde vid $t=0$]. Vi får: $V(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i)$ V

$i(t) = I_m \cos(\omega t)$ A

$P(t) = V(t) \cdot i(t) = V_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cdot \cos(\omega t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v - \theta_i) =$

$\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) \cdot \cos(2\omega t) - \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot \sin(\theta_v - \theta_i) \sin(2\omega t)$

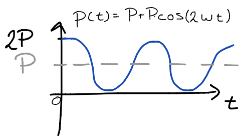
Skriv om: $p(t) = P + P \cdot \cos(2\omega t) - Q \cdot \sin(2\omega t)$

$P = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos(\theta_v - \theta_i)$ (medeleffekt aktiv effekt)

$Q = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \sin(\theta_v - \theta_i)$ (reaktiv effekt)

Momentan effekt

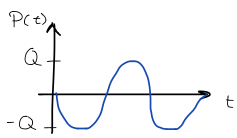
* Ren, resistiv, krets. Ström och spänning är i fas, $\theta_v - \theta_i = 0$.



Tidsmedelvärde: P

* Ren, induktiv, krets. Bara en spole. Spänning 90° före ström. $\sin(\overbrace{\theta_v - \theta_i}^{90°}) = 1$

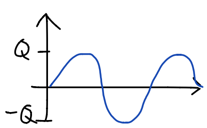
$P(t) = -Q \cdot \sin(2\omega t)$ $(Q > 0)$



Tidsmedelvärde: 0

* Ren, kapacitiv, krets. Ström 90° före spänningen. $\theta_v - \theta_i = -90°$

$p(t) = -Q \sin(2\omega t)$ $(Q < 0)$



Tidsmedelvärde: 0

Komplex effekt

Beräkning av P och Q med jω-metoden.

$S = P + jQ$

$V(t) \Rightarrow V_m \angle \theta_v$

$i(t) \Rightarrow I_m \angle \theta_i$

Konjugat, BARA på I.

S beräknas som $S = \frac{1}{2} V \cdot I^* = \frac{1}{2} V_m \angle \theta_v \cdot I_m \angle -\theta_i = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \angle \theta_v - \theta_i = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot (\cos(\theta_v - \theta_i) + j \cdot \sin(\theta_v - \theta_i)) =$

$\frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + j \cdot \frac{1}{2} \cdot V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i) = P + jQ$

Dimensioner

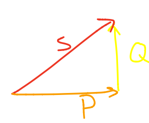
S [VA] Volt ampere

P [W] Watt

Q [VAR]

Skenbar effekt: $|S| = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m$

Effekttriangel



Effektivvärde

Om effektivvärdet används för strömmar och spänningar "försvinner" $\frac{1}{2}$ i formlerna för växelströmseffekt och likhet fås med DC-fallet.

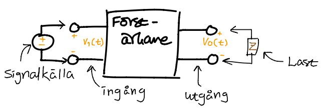
För en ström: $i(t)=I_m\cos(\omega t+\theta_i)$ fås effektivvärdet: $I_e=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ T = Periodtid

För en spänning: $V(t)=V_m\cos(\omega t+\theta_v)$ fås $V_e=\frac{V_m}{\sqrt{2}}$

Termen: $\frac{1}{2}V_m I_m=\frac{V_m}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_m}{\sqrt{2}}=V_e I_e$, Allmänt gäller alltså $\frac{V_m I_m}{2}=V_e I_e$ där $V_e=V_{RMS}$, $I_e=I_{RMS}$

Förstärkare

Allmänt för en spänningsförstärkare.

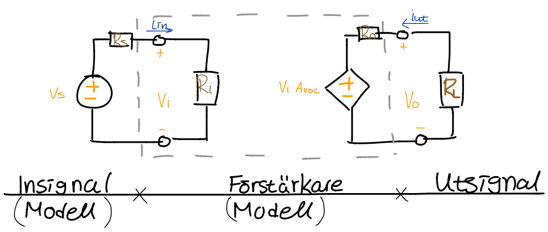


Exempel på signalkälla: Mikrofon, sensor
Exempel på last : Högtalare

Spänningen på ingången $V_i(t)$ förstärks till utgången med faktorn A_v. $V_o(t)=A_v\cdot V_i(t)$

amplifier (i labben är detta F = gain)

En förstärkares uppbyggnad kan många gånger vara komplicerad och innehålla flera kretselement. Utifrån sett kan en spänningsförstärkare beskrivas utifrån följande modell:



Tre förstärkarparametrar

R_i : inresistans (in-impedans)

R_o : Utresistans (ut-impedans)

A_{voc}: Förstärkning (oc = open circuit)

Inimpedans $R_i=\frac{V_i}{i_{in}}$ vet inte riktigt vad det där sträcket betyder

Utimpedans $R_o=\frac{V_o}{i_{ut}}$ | nollställ oberoende källor => $V_s=0 \Rightarrow V_i=0 \Rightarrow V_i\cdot A_{voc}=0$

Spänningsdelning

Vid ingång: $V_i=V_s\cdot\frac{R_i}{R_i+R_s}$ Om $R_i \gg R_s$ => blir $V_i\approx V_s$ en grundregel är att vi önskar ha ett stort R_i.

Vid utgång: $V_o=V_i\cdot A_{voc}\frac{R_L}{R_L+R_o}$ För att erhålla en hög spänningsförstärkning önskar vi ha ett litet R_o.

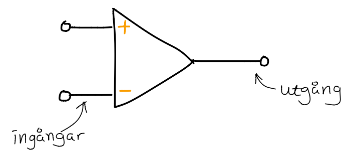
Total förstärkning

$$A_v=\frac{V_o}{V_s}=\frac{V_i\cdot A_{voc}\frac{R_L}{R_L+R_o}}{V_i\cdot\frac{R_i+R_s}{R_i}}=A_{voc}\cdot\frac{\frac{1}{1+\frac{R_o}{R_L}}}{1+\frac{R_s}{R_i}}=A_{voc}\cdot\frac{1}{1+\frac{R_o}{R_L}}\cdot\frac{1}{1+\frac{R_s}{R_i}}$$

Högst spänningsförstärkning ges då $\frac{R_o}{R_L}\ll 1$ och $\frac{R_s}{R_i}\ll 1$

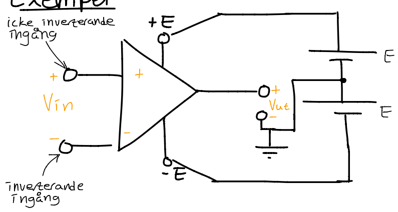
Annat problem: Hur väljs R_L för maximal effektutveckling i lasten? (Detta behandlas i labben.)

Operationsförstärkare



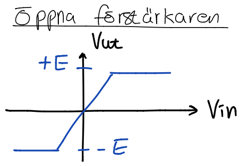
- En operationsförstärkare är en generell förstärkare med många tillämpningar.
- Förstärker i huvudsak "små" elektriska signaler (mA, V<10 V)
- Aktiv komponent vilken måste förses med effekt från t.ex ett batteri eller ett spänningsaggregat.

Exempel

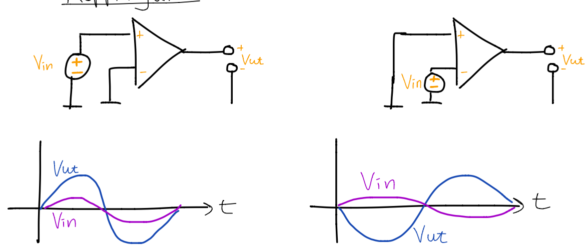


Typiskt värde på matningsspänning E är ±15 V. Normalt markeras inte ±E på symbolen för förstärkaren i ett kretsschema.

Öppna förstärkaren

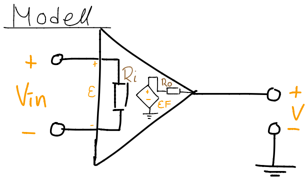


Kopplingar



En operationsförstärkare är en relativt komplicerad krets om man tittar "under skalet". Utifrån sett kan dock operationsförstärkaren (OPf) karakteriseras av en "enkel" modell.

Modell



Ideal opf

Konstruktören eftersträvar att skapa en ideal opf med följande egenskaper:

Inimpedans: $R_i = \infty$

Utimpedans: $R_o = 0$

Spänningsförstärk: $F = \infty$

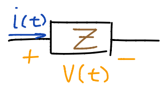
Bandbredd: $B = \infty$

Kan en sådan krets vara användbar? Ja, tydligen....

Uppgifter

5,69
5,67
5,64
5,86
5,72
E 6-16

5,69



Givet

$V(t) = 10^4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + 75°)$

$i(t) = 25\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + 30°)$

Sökt

Komplex effekt S

Effektfaktor $PF = \cos(\theta_v - \theta_i)$

Reaktiv effekt Q

Aktiv effekt P

Skenbar effekt $|S|$

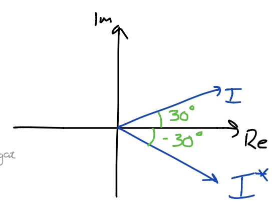
Är lasten induktiv eller kapacativ?

Lösning

$V = 10^4 \cdot \sqrt{2} \angle 75°$

$I = 25 \cdot \sqrt{2} \angle 30°$

$S = \frac{1}{2} V I^*$ ← Komplexkonjugat



$S = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \sqrt{2} \angle 75° \cdot 25\sqrt{2} \angle -30° = 25 \cdot 10^4 \angle 75° - 30° = 25 \cdot 10^4 \angle 45° = 25 \cdot 10^4 (\cos(45) + j\sin(45)) = 25 \cdot 10^4 (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}) = 12{,}5 \cdot 10^4 \sqrt{2} + j12{,}5 \cdot 10^4 \sqrt{2}$ VA

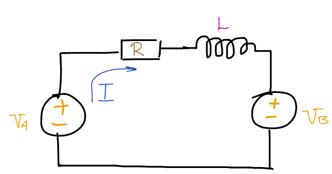
$P = Re\{S\} = 12{,}5 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2}$ W

$Q = Im\{S\} = 12{,}5 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2}$ VAR

$PF = \cos(75 - 30) = \cos(45) = 0{,}71 \Rightarrow 71\%$ $\theta > 0 \Rightarrow$ induktiv last

$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}$

5,67



Givet

$V_A = 240\sqrt{2} \angle 60°$

$V_B = 280\sqrt{2} \angle 30°$

$R = 5\,\Omega$

$L = +j8\,\Omega$

Sökt

Effekten för samtliga element.

Lösning

Finn strömmen med KVL: $-240\sqrt{2} \angle 60 + 5I + j8I + 280\sqrt{2} \angle 30° = 0$

$I(5 + j8) = 240\sqrt{2} \angle 60 - 280\sqrt{2} \angle 30$

$I = \frac{240\sqrt{2} \angle 60 - 280\sqrt{2} \angle 30}{5 + j8} \approx \frac{240\sqrt{2} \angle 60 - 280\sqrt{2} \angle 30}{9{,}43 \angle 60°} \approx 25\sqrt{2} \angle 0 - 29{,}7\sqrt{2} \angle -30°$

$I = \sqrt{2}(25 - 29{,}7(0{,}87 - j0{,}5)) = \sqrt{2}(-0{,}34 + j14{,}85) = 14{,}85\sqrt{2} \angle 91{,}3°$ A

A levererar, ty motriktad strömmen: $P_A = V_{RMS\text{-}A} \cdot I_{RMS\text{-}A} \cdot \cos(\theta_v - \theta_i) = 240 \cdot 14{,}85 \cos(60 - 91{,}3) = 3050$ W

$Q_A = V_{RMS\text{-}A} \cdot I_{RMS\text{-}A} \cdot \sin(\theta_v - \theta_i) = 240 \cdot 14{,}85 \sin(60 - 91{,}3) = -1850$ VAR

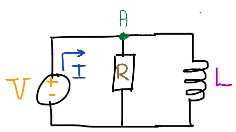
B absorberar, "ström in i plus": $P_B = 1990$ W

$Q_B = -3650$ VAR

Resistanser absorberar enbart aktiv effekt. Detta eftersom den är helt reell.
$P_R = P_A - P_B = 1{,}06$ kW

Spolen kommer i sin tur enbart absorbera reaktiv effekt.
$Q_L = -1{,}85 - (-3{,}65) = 1{,}8$ kVAR

5,64



Givet
$V = 1000\sqrt{2}\angle 90^\circ$
$R = 100\,\Omega$
$L = 1$ H
$\omega = 377$

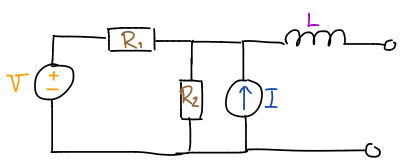
Sökt
I
$P, Q, |S|$
PF

Lösning
$Z_L = j\omega L = j377\,\Omega$

Finn I mha KCL i A: $I = \frac{1000\sqrt{2}\angle 90}{100} + \frac{1000\sqrt{2}\angle 90}{j377} = 10\sqrt{2}\angle 90 + 2{,}65\sqrt{2}\angle 90-90 = 2{,}65\sqrt{2} + j10\sqrt{2}$ A
$I = 10{,}3\cdot\sqrt{2}\angle 75^\circ$

$|S| = V_{RMS}\cdot I_{RMS} = \frac{1000\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{10{,}3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1000\cdot 10{,}3 = 10{,}3\cdot 10^3$ VA
$P = V_{RMS}\cdot I_{RMS}\cdot\cos(\theta_v - \theta_i) = 10{,}3\cdot 10^3\cdot\cos(15) = 9{,}95\cdot 10^3$ W
$Q = V_{RMS}\cdot I_{RMS}\cdot\sin(\theta_v - \theta_i) = 2.67\cdot 10^3$ VAR
$PF = \cos(\theta_v - \theta_i) = 0{,}97 \Rightarrow 97\%$

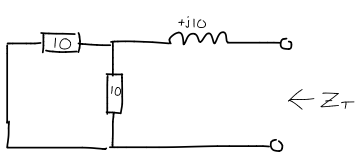
5,86



Givet
$V = 50\angle 0^\circ$
$R_1 = 10\,\Omega$
$R_2 = 10\,\Omega$
$I = 5\angle 0^\circ$
$L = +j10\,\Omega$

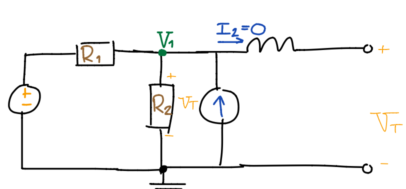
Sökt
Norton & Thévenin
Maximal effekt över R_L utan restriktioner på Z_L.
Maximal effekt då R_L är resistiv.

Lösning



$Z_T = (10 /\!/ 10) + j10 = 5 + j10\,\Omega$

Voc



$V_1 = V_T$

V_T

Nodanalys i V_1: $-5\angle 0^\circ + \frac{V_1 - 0}{10} + \frac{V_1 - 50\angle 0}{10} = 0$
$-50\angle 0^\circ + V_1 + V_1 - 50\angle 0^\circ = 0$
$2V_1 = 100\angle 0^\circ$
$V_1 = 50\angle 0^\circ \Rightarrow V_T = 50\angle 0^\circ$

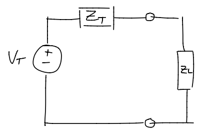
$V_T = 50\angle 0°$ med last Z_T.

$I_N = \frac{V_T}{Z_T} = 4,47\angle -63,43°$ med last Z_T.

Maximal effekt: $Z_L = Z_T^* = 5 - j10$

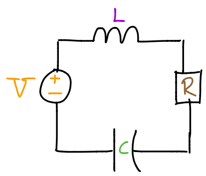
$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} = 5\angle 0°$

$P_L = 5\left(\frac{I_L}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \cos(0-0) = 62.5\ W$



$Z_L = 11,18\left(\frac{2,63}{\sqrt{2}}\right)^2 \cos(-31,72-(-31,72)) = 38,62\ W$

6,72



Givet

$V = 1\angle 0°$

$L = 8 \cdot 10^{-6}\ H$

$R = 14,14\ \Omega$

$C = 1000 \cdot 10^{-12}\ F$

Sökt

Resonansfrekvens

Bandbredd

3dB frekv, f_l, f_h

$f = f_0$, V_L, V_R, V_C

Lösning

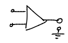
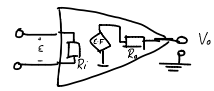
$Z(f) = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} = j2\pi f L + R + \frac{1}{j2\pi f C} = j2\pi f L + R - \frac{j}{2\pi f C}$

f_0 ges när $Z(f)$ resistiv $\Rightarrow \mathrm{Im}\{Z(f_0)\} = 0$

$\mathrm{Im}\{Z(f_0)\} = 2\pi f_0 L - \frac{1}{2\pi f_0 C} = 0 \iff (2\pi)^2 f_0^2 LC - 1 = 0 \iff (2\pi)^2 \cdot f_0^2 LC = 1 \iff f_0 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,78\ MHz$

Resten av uppgiften skall läggas upp på nätet.

Operationsförstärkare

Den omätbart krångliga bilden kan förenklas till  och beräknas med bilden 

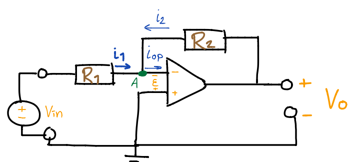
I en ideal op-förstärkare eftersträvas:

$R_i = \infty$
$R_o = 0$
$F = \infty$
$B = \infty$

forts. OPF

Förstärkarkoppling av typen: inverterande förstärkare.
antag: ideal OPF men F är begränsad => $F < \infty$

Negativ återkoppling används. Det innebär att utgången på något sätt kopplas tillbaka till minusingången.



$R_i = \infty \Rightarrow i_{op} = 0$
$R_o = 0 \Rightarrow V_o = \varepsilon F$

KCL i A: $i_1 + i_2 - i_{op} = 0 \quad (i_{op} = 0)$

$i_1 + i_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_{in}+\varepsilon}{R_1} \\ i_2 &= \frac{V_o+\varepsilon}{R_2} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_2} = 0 \\ &V_o = \varepsilon \cdot F \end{aligned}$$

Eliminera ε

$$\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_o}{FR_1} + \frac{V_o}{R_2} + \frac{V_o}{F \cdot R_2} = 0$$

$$\frac{V_{in}}{R_1} = -V_o\left(\frac{R_2 + FR_1 + R_1}{F \cdot R_1 \cdot R_2}\right)$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{FR_2}{R_1 + R_2 + FR_1} = \{\text{dela med } FR_1 \text{ i täljare och nämnare}\} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1+R_2}{FR_1}}$$

Om F är ~~stor~~ => $\frac{R_1+R_2}{FR_1} \ll 1$ och $\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$ då $F \to \infty$.

Eliminera V_o för att få reda på vad som händer med ε

$$\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon F}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_2} = 0$$

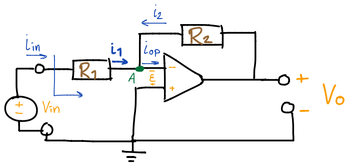
$$\frac{V_{in}}{R_1} = -\varepsilon\left(\frac{R_2 + FR_1 + R_1}{R_1 R_2}\right)$$

$$\varepsilon = -V_{in}\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot F}\right)$$

antag V_{in} begränsad.
$\varepsilon \to 0$ då $F \to \infty$

Allmänt gäller att om utgången på en ideal OPF återkopplas till minusingången blir $\varepsilon = 0$.
Man säger att minusingången blir "virtuell jord" eller "virtuell kortslutning" mellan + och - ingångarna.
Notera: Ingen galvanisk förbindelse mellan ingångarna, $i_{op} = 0$.

Alternativ lösning



Antag ideal OPF.
Negativ återkoppling } $i_{op} = 0$, $\varepsilon = 0$

KCL i A: $i_1 + i_2 = 0$

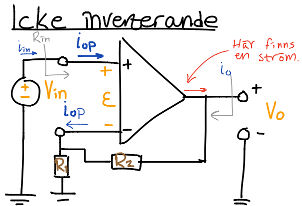
$$\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} = 0$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Inresistans för hela förstärkaren

$$R_{in} = \frac{V_{in}}{i_{in}} = \frac{V_{in}}{i_1} = R_1$$

Icke inverterande



Antag ideal OPF
Neg återkoppling } $i_{op} = 0$, $\varepsilon = 0$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow V_{in}$ ligger över R_1.
Samma ström genom R_1 och R_2.

Spänningsdelning: $V_{in} = V_o \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$

Inresistans

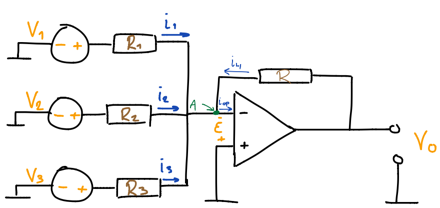
$R_{in} = \frac{V_{in}}{i_{in}} = \frac{V_{in}}{i_{op}} = \infty$, ty $i_{op} = 0$ (man får tydligen dela med 0...)

Hela kretsens utresistans

$R_{ut} = \frac{V_o}{i_o}\Big|_{\substack{\text{nollställ ober. källor} \\ V_{in} = 0}} = R_o = 0$

Notera: Då förstärkaren arbetar med sin förstärkningsfaktor $\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right)$ passerar ström genom R_1 och R_2. Denna ström kommer från OPFns utgång.

Summator



Antag ideal OPF
Neg återkoppling } $i_{op} = 0$, $\varepsilon = 0$

KCL i A: $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 (+ i_{op}) = 0$

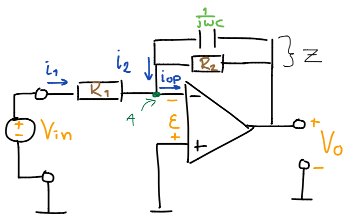
$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_o}{R} = 0$$

$$V_o = -R\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}\right) = -\left(V_1 \cdot \frac{R}{R_1} + V_2 \cdot \frac{R}{R_2} + V_3 \cdot \frac{R}{R_3}\right)$$

V_o är en viktad summa av insignalsspänningarna.

Om $R = R_1 = R_2 = R_3 \Rightarrow V_o = -(V_1 + V_2 + V_3)$

Frekvensberoende förstärkare



jω-transformera

Antag ideal OPF
Neg återkoppling } $i_{op}=0$, $\varepsilon=0$

KCL i A: $i_1+i_2=0$

$$Z = R_2 // \frac{1}{j\omega C} = \frac{R_2\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1+j\omega C R_2}$$

$$\frac{V_{in}}{R_1}+\frac{V_o}{Z}=0$$

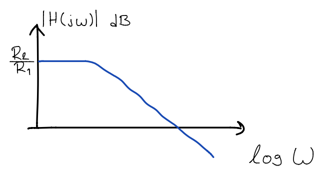
$$\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{Z}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{1+j\omega C R_2} = H(j\omega)$$

Amplitud förändring

Frekvensberoende.

$$|H(j\omega)| = \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(\omega C R_2)^2}}$$

Grafiskt, bodediagram



$$|H(j\omega)| \; dB = 20\,{}^{10}\log \underbrace{|H(j\omega)|}_{\left|\frac{V_o}{V_{in}}\right|}$$

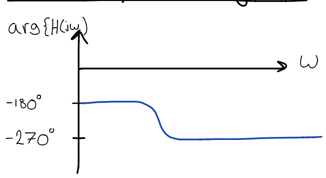
Fasförskjutning

$\arg\{H(j\omega)\}$

minustecken ger direkt ett bidrag på 180°.

$$\arg\{H(j\omega)\} = -180° - \arctan(\omega R_2 C)$$

Grafiskt, bodediagram



Kretsen utgör ~~ett~~ "lågpassfilter".

Elektromagnetiska fält

Fält är verkan över avstånd.

kraft / fält

$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$, $\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{G\frac{Mm}{r^2}}{m}\hat{r} = -G\cdot\frac{M}{r^2}\hat{r}$

m= massa , M= jordens massa

Tentan kommer beröra elektro-/magnetisk statistik.

elementarladdning: $e = 1.602\cdot10^{-19}$ Coulomb

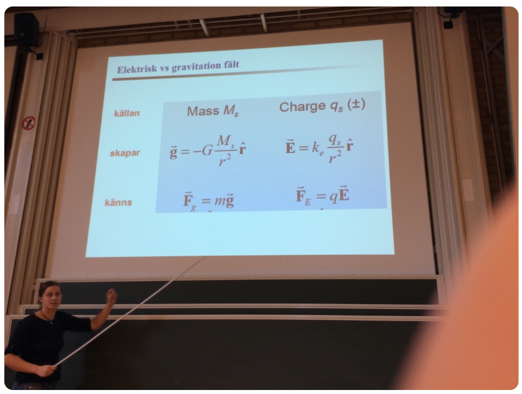
kvantificerad: $Q = \pm Ne$

konserverad: Den totala laddningen i ett slutet system kan aldrig ändras. Den kan dock omfördelas.

Elektrisk verkan mellan laddningar: Repulsiv: Laddning med lika tecken.
Attraktiv: Laddning med olika tecken.

Coulombs lag: $\vec{F}_{12} = k_e\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\hat{r}$, $k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.9875\cdot10^9\ Nm^2/C^2$

Man kan testa ett fälts styrka genom att "prova på" en elementärladdning.



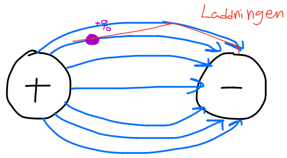
Fältlinjer

Fältlinjer ritas alltid radiellt från laddningen.

De ritas bort från positiv laddning

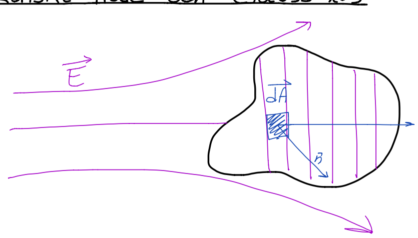
De får aldrig korsa varandra.

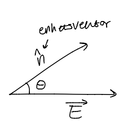
Laddningen följer inte fältlinjerna utan accelereras tangentiellt mot sitt mål.



SUPERPOSITION: Det totala elektriska fältet från en grupp punktladdningar är vektorsumman av bidragen från laddningarna.

Elektriskt flöde och Gauss lag





$d\Phi = \vec{E}\cdot\hat{n}\cdot dA$

i ett homogent fält

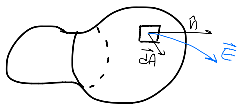
Flödet Φ beräknas: $\Phi = A\cdot\vec{E}\cdot\cos(\theta)$

Flödet är som störst då $E\perp A$ och noll då $A /\!/ E$.

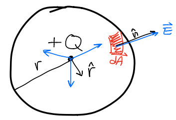
Ett icke-homogent fält beräknas: $\Phi = \iint_S \vec{E}\, d\vec{A}$

A=x·y (yta)

<u>Sluten yta</u>



Ex



$\cos(\theta) = 1$ ty $\hat{n} \parallel \vec{E}$, $\hat{n} \cdot \hat{r} = 1$

$\phi = E \cdot 4\pi r^2$

ytans area

$\vec{E}(r) = \frac{Q \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$, enligt def.

$$\phi = 4\pi r^2 \cdot \frac{Q \cdot \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

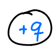
Elektrisk potential

Ex 1

Vi ställer oss frågan: Hur mycket energi går åt att lägga de repellerande laddningarna på rätt ställe

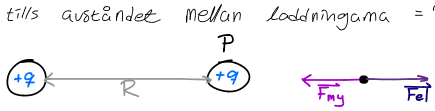
Steg 1.

Placera ut EN laddning. Det kräver inget arbete. $(W_1 = 0)$



Steg 2

Placera ut laddning två. $(W_2 = ?)$ Vi börjar oändligt långt bort och flyttar laddningen till punkt P tills avståndet mellan laddningarna $= R$.

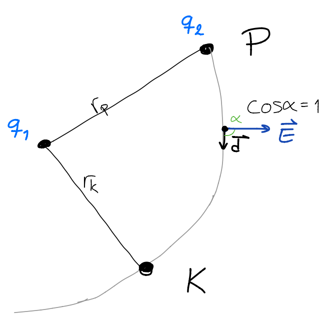


$$\Delta W = W_2 - W_1 = \int_{\infty}^{r} \vec{F}_{my}\, \vec{dr} = \int_{r}^{\infty} \vec{F}_{el} \cdot \vec{dr} = \left\{ \begin{matrix} \text{Coulombs} \\ \text{lag} \end{matrix} \right\} = \int_{r}^{\infty} \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{r}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr = \left[\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot -\frac{1}{r} \right]_r^{\infty}$$

$$\Delta W = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(0 + \frac{1}{R} \right) = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{ Joule}$$

Ex 2

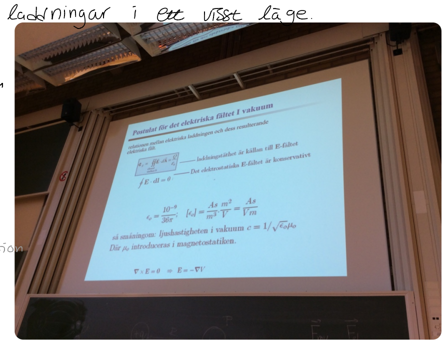
Vilket arbete erfodras för att flytta laddningen q_2 en sträcka r längs en radiell bana från $p \to k$.



$$W = \int_{r}^{k} -\vec{F}_{el} \cdot \vec{dr} = \int_{K}^{r} \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2} = \left[\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{-1}{r} \right]_k^r = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_p} \right)$$

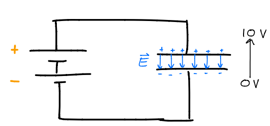
Det spelar ingen roll vilken väg du tar för att komma till K. Arbetet som krävs kommer vara detsamma.

Potentiell energi är mängden arbete som krävs för att hålla laddningar i ett visst läge.



Elektrisk potential $U = \frac{\Delta W}{q_0}$ $\left[\frac{J}{C}\right] = [\text{Volt}]$ $U = V_2 - V_1 = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\, \vec{dl}$, $V_2 > V_1$

Exempel i krets



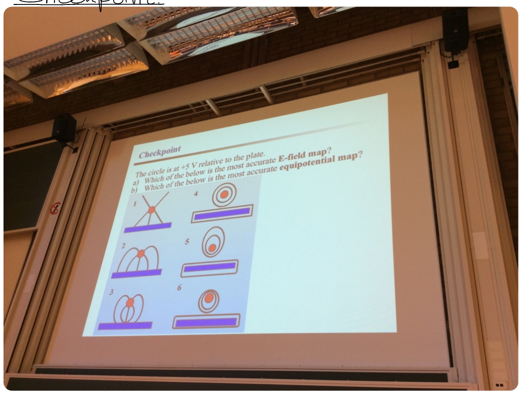
Analogt kan man tänka: $qEd \Leftrightarrow mgd$

laddning, fält, avstånd, massa, gravitation

Checkpoint: En positiv laddning, vilken placeras i ett E-fält, kommer att acceleras från högre till lägre elektrisk potential och potentiell energi.

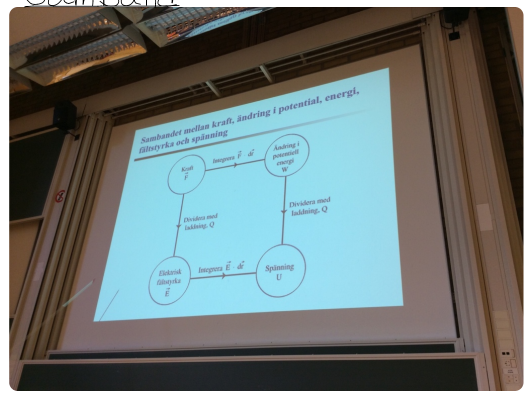
Ett E-fälts linjer går alltid från högre till lägre potential. Det erfodras inget arbete för att röra sig vinkelrätt gentemot fältet.

Checkpoint:



a) 2
b) 5

Samband



Konduktorer och isolatorer

Konduktor: Laddning kan röra sig snabbt och fritt.
Innuti en konduktor är E-fältet = 0.
E-fältet är vinkelrätt met ytan.

Isolator: Laddning rör sig inte.
Finns polära och ickepolära.

Permitivitet

Permittivitet är en fysikalisk storhet som beskriver hur ett elektriskt fält påverkar och påverkas av ett elektriskt isolerande material, och är bestämd efter ett materials förmåga att polariseras i förhållande till dess fält, och därför reduceras fältet inuti materialet.

Kapacitans och Kapacitorer

$C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| = \left[\frac{C}{V}\right] = [F] \quad C > 0$

Kapacitans är måttet på hur väl en komponent kan hålla laddning.

Det elektriska fältet mellan två parallella plattor: $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Kapacitansen beräknas: $C = \left|\frac{Q}{\Delta V}\right| = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, $V = E \cdot d$

Checkpoint

En kapacitator med parallella plattor har lika stora - men motsatt - laddning. Avståndet mellan dem är d och de är inte anslutna till ett batteri.

Vad händer när d ökar?

V ökar och Q förblir oförändrad.

Detta eftersom $V = E \cdot d$ och att vi inte kan ändra Q eftersom vi inte har någon yttre källa.

E 14.4

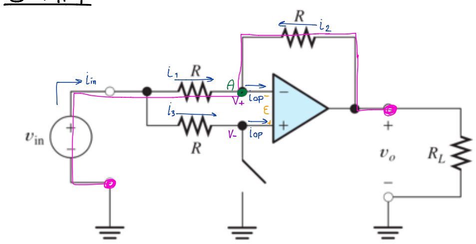


Figure 14.13 Inverting or noninverting amplifier. See Exercise 14.4.

Sökt

$\frac{V_o}{V_{in}}$, R_i

a) Open switch

b) Closed switch

Lösning a)

Ideal OPF, enligt uppgift
Negativ återkoppling
$\Big\}$ $\varepsilon = 0$, $i_{op} = 0$

KVL: $-V_{in} + i_1 \cdot R - i_2 \cdot R + V_0 = 0$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow V_+ = V_-$

$i_3 = i_{op} = 0$

$V_{in} = V_+$ ty $i_3 = 0$ och $V_- = V_{in}$

Inget spänningsfall över övre resistor R vid ingången $\Rightarrow i_1 = 0$.

KCL i A: $i_1 + i_2 = 0$, ty $i_{op} = 0$

$i_2 = 0$

Ekv 1 $\Rightarrow V_{in} = V_o \Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = 1$

Rin

$R_{in} = \frac{V_{in}}{i_{in}} = \frac{V_{in}}{i_1 + i_3} = \frac{V_{in}}{0} \rightarrow \infty$

$i_1 = 0$, $i_3 = 0$

Lösning b)

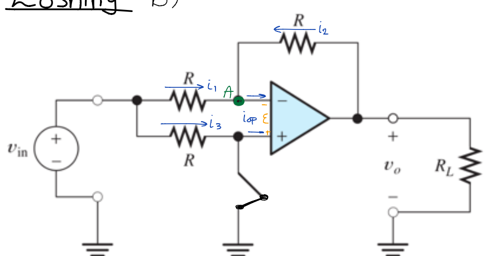


Figure 14.13 Inverting or noninverting amplifier. See Exercise 14.4.

Ideal OPF
Negativ återkoppling
$\Big\}$ $\varepsilon = 0$, $i_{op} = 0$

KCL i A: $i_1 + i_2 = 0$ ty $i_{op} = 0$

$\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_o}{R} = 0$

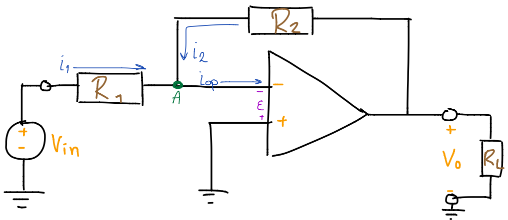
$V_{in} + V_o = 0$

$\frac{V_o}{V_{in}} = -1$

Rin

$\frac{V_{in}}{i_{in}} = \frac{V_{in}}{i_1 + i_3} = \frac{V_{in}}{\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_{in}}{R}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{\frac{2}{R}} = \frac{R}{2}$

P14.10



Givet

$R_1 = 10 \cdot 10^3\ \Omega$

$R_2 = 40 \cdot 10^3\ \Omega$

$R_L = 1 \cdot 10^3\ \Omega$

$V_{in} = 5 \cdot \cos(2000\pi t)$

Sökt

$A_v = \frac{V_o}{V_{in}}$

T

Skissa

Lösning

Ideal OPF
Neg. återk } $\varepsilon = 0,\ i_{op} = 0$

KCL i A: $i_1 + i_2 - i_{op} = 0$

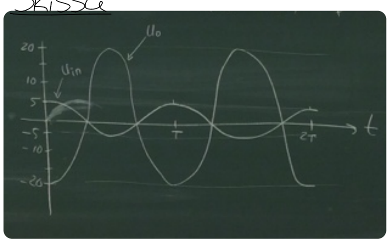
$\frac{V_{in}}{R_1} + \frac{V_o}{R_2} = 0$

$\frac{V_o}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1} = -4 \Rightarrow V_o = -4 \cdot V_{in} = -20\cos(2000\pi \cdot t) = 20\cos(2000\pi - \pi)$

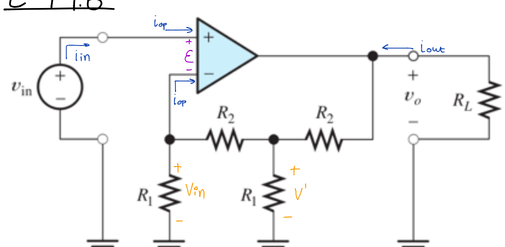
$\omega = 2000\pi = 2\pi \cdot 1000 \Rightarrow f = 1000$ Hz

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000}$ s

Skissa



E 14.6



Givet

Ideal OPF

Negativ återk.

$\Rightarrow \varepsilon = 0,\ i_{op} = 0$

Sökt

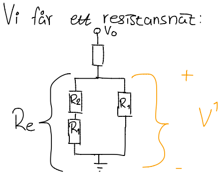
$A_v = \frac{V_o}{V_{in}}$

R_{in}

Lösning

$\varepsilon = 0 \Rightarrow V_{in}$ ligger över R_1.

Vi får ~~ett~~ resistansnät:



$R_e = R_1 /\!/ R_1 + R_2 = \frac{R_1(R_1+R_2)}{R_1+R_1+R_2}$

Spänningsdelning

$V' = V_o \frac{R_e}{R_2 + R_e} = V_o \frac{\frac{R_1(R_1+R_2)}{R_1+R_1+R_2}}{R_2 + \frac{R_1(R_1+R_2)}{R_1+R_1+R_2}} = V_o \cdot \frac{R_1(R_1+R_2)}{R_2(2R_1+R_2)+R_1(R_1+R_2)}$

Spänningsdelning, igen:

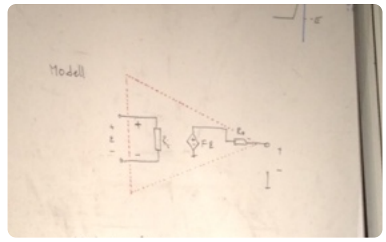
$V_{in} = V' \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} = V_o \cdot \frac{R_1}{\cancel{R_1+R_2}} \frac{R_1\cancel{(R_1+R_2)}}{R_2(2R_1+R_2)+R_1(R_1+R_2)} \Rightarrow \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{R_1^2+R_2^2+3 \cdot R_1 R_2}{R_1^2} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + 3\frac{R_2}{R_1}$

Rin

$R_{in} = \frac{V_{in}}{I_{in}} = \frac{V_{in}}{I_{op}} \to \infty$

Rout

$R_{out} = \frac{V_o}{I_{out}} = \{V_{in} = 0\} = 0$ ty operationsförstärkarens $R_o = 0$.



En liten modell.

P 14.32

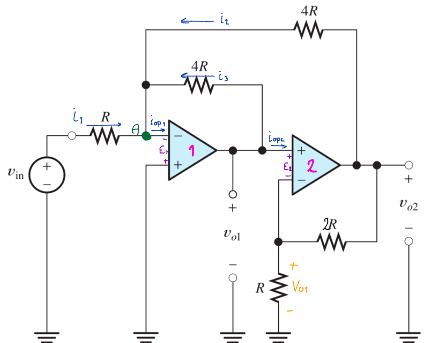


Figure P14.34

Sökt

A_1, A_2 using the summing-point constraint.

Lösning

För bägge OPF: ideala och negativ återkoppling => $\varepsilon_{1,2} = 0$, $i_{op1,2} = 0$

KCL i A: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

$\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_{o2}}{4R} + \frac{V_{o1}}{4R} = 0$

Spänningsdelning: $V_{o1} = V_{o2} \cdot \frac{R}{R+2R} = \frac{V_{o2}}{3}$

$V_{o2} = 3V_{o1}$

$V_{in} = -\frac{V_{o1}}{4} - \frac{3V_{o1}}{4} = -\frac{4}{4} \cdot V_{o1} = -V_{o1}$

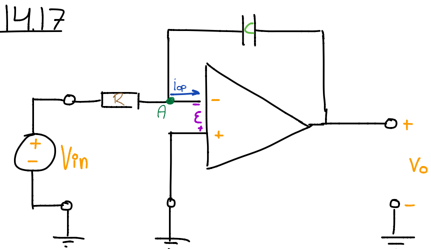
$A_1 = \frac{V_{o1}}{V_{in}} = -1$

För hela kretsen: Eliminera V_{o1}.

$V_{o1} = \frac{V_{o2}}{3} \Rightarrow V_{in} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot V_{o2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot V_{o2} = -\frac{V_{o2}}{3}$

$A_2 = \frac{V_{o2}}{V_{in}} = -3$

P 14.17



Lösning

Använd jω-metoden.

Ideal OPF
Neg. åter: } $\varepsilon = 0$, $i_{op} = 0$

KCL_A: $I_1 + I_2 = 0$

$\frac{V_{in}}{R} + \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega C}} = 0$

I tidsdomänen: $V_{in}(t) = -RC \frac{dV_o(t)}{dt}$

Integrera: $\int_{-\infty}^{t} V_{in}(\tau)\,d\tau = -RC \cdot V_o(t)$

$V_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} V_{in}(\tau)\,d\tau$ ⟶ En integrator!

Magnetiska fält

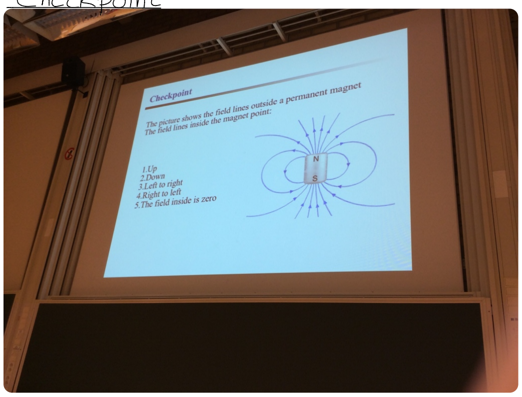
Magnetiska fält går från norr till söder.

Lika poler repellerar och olika attraherar precis som elektriska laddningar.

Dipoler

Om vi bryter en elektrisk dipol får vi laddningarna var för sig. Gör vi samma sak med en magnet får vi två nya dipoler.

Checkpoint



① Till skillnad från ett elektriskt fält är fältet innuti magneten $\neq 0$

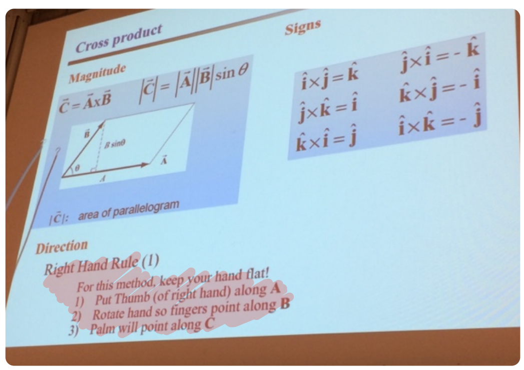
Fältlinjerna går uppåt

Detta föranleder Gauss magnetiska lag, och Maxwells ekv: $\oint\!\!\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

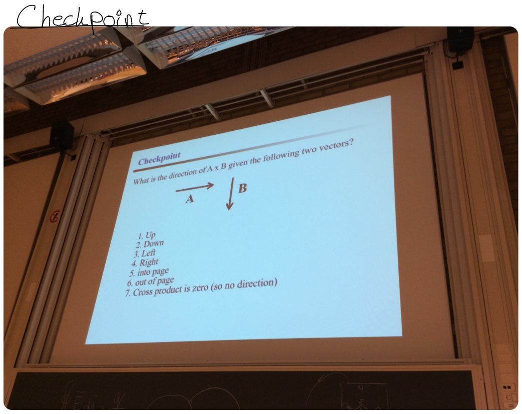
Magnetisk kraft

$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$

Kom ihåg högerhandsregeln!



Checkpoint



5, into page!

Lorence Force

$\vec{F}_e = q\vec{E}$

Electric Force

$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$

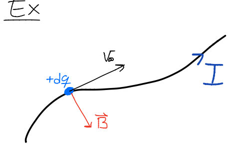
Magnetisk kraft

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Magnetfält betecknas inåt: $\otimes$

utåt: $\odot$

Ex



$d\vec{F} = dq(\vec{v}_0 \times B)$

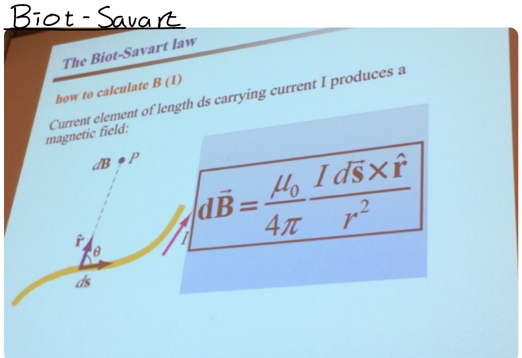
$I = \frac{dq}{dt}$

$\vec{v}_0 \cdot dt = d\vec{l}$

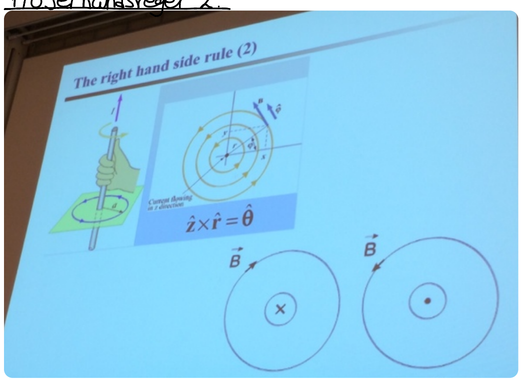
$d\vec{F} = I dt(\vec{v}_0 \times \vec{B})$

$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$

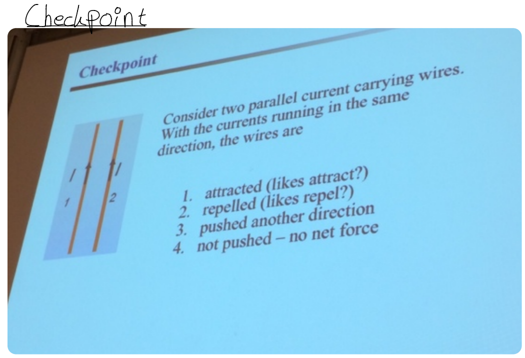
Biot-Savart



Högerhandsregel 2.



Checkpoint



1. de bildar ett gemensamt fält.

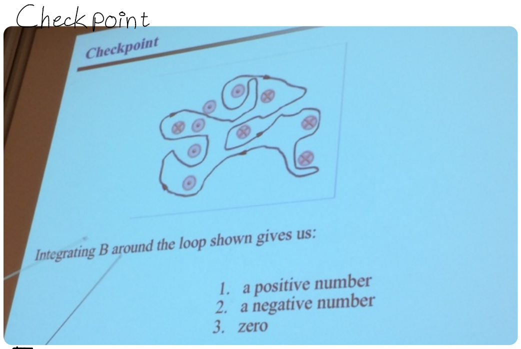
Amperes lag

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_{enc}$

Cirkulationsintegralen av den magnetiska fältstyrkan B är lika med strömmen innesluten av konturen.

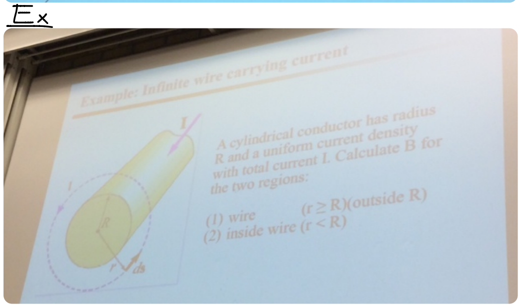
I_{enc} är strömmen genom S. $I_{enc} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$ där J = current density

Checkpoint



3.
Innuti arean finns lika många ⊙ som ⊗.

Ex



- Vi ska beräkna fältet såväl inuti som utanför.
- Magnetfältet är konstant på ~~ett~~ visst (radiellt) avstånd från centrum.

$$\underbrace{\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{s}}_{2} = \underbrace{\mu_0 I_{enc}}_{3}$$

1. $\vec{B} = B(r)\,\hat{\phi}$

2. $\oint \vec{B}\,d\vec{s} = 2\pi r \cdot B(r)$

3. a) $r > R$

$I_{enc} = I$

$2\pi r \cdot Br = \mu_0 \cdot I$

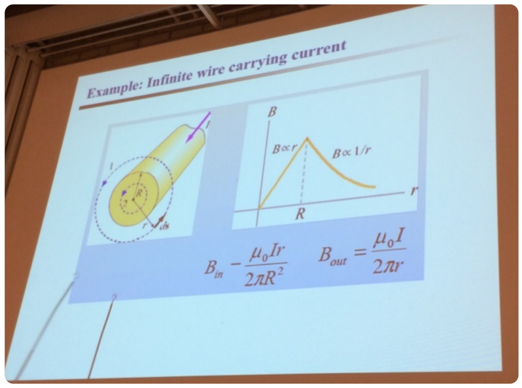
$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

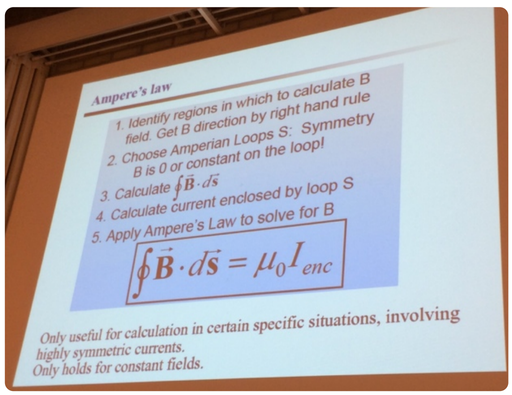
b) $0 < r < R$

$I_{enc} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$, $J = \frac{I}{\pi \cdot R^2}$ ty vi har att gora med en cirkel att gora

$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot dA = \mu_0 \cdot J \cdot \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r^2 = \mu_0 \cdot \frac{I}{R^2} \cdot r^2$

$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r^2}{2\pi r \cdot R^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot r}{2\pi \cdot R^2}$



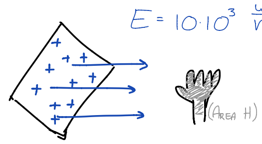


Uppgifter
2.9, 11, 12
3.2, 7

2.9
En hand hålls nära en uppladdad yta. Vilken nettoladdning kan handen få om den elektriska fältstyrkan är $10\,k\frac{V}{m}$? Handens area är $1\,dm^2$ och hålls i luften.

$E = 10 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$

Notis: Skriv om till SI-enheter asap!

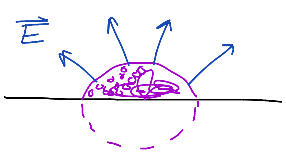


$A_H = 1\,dm^2 = 0{,}01\ m^2$

Lösning
$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, ε_0 är permativitet i vakuum. Permativiteten för luft är "typ samma". $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$
ρ [rå] är i detta fall ytladdningstäthet och beräknas: $\rho = \frac{Q}{A}$ där Q är den totala laddningen

$E = \frac{Q/A}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q = E \cdot A \cdot \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-10}\ C$

2.11
Plastkulor trillar ner på en matta och det bildas en hög. Högen blir som en halvsfär och ett fält utifrån högen uppstår. E-fältet antas ha egenskapen likt e-fältet från en perfekt sfär.



Om en kula faller mot högen kan den under rätt förutsättningar sväva 1 meter ovanför mattan. Kulan väger $1\,\mu g$ och har laddning $+1\,pC$.

a) Beräkna den elektriska fältstyrkan i den position kulan svävar.
b) Högens totala laddning.

Lösning
a) För att kulan ska kunna sväva måste $\vec{F}_H = \vec{F}_k = m_k \cdot g$

Kraft från Hög — Kraft från kulan

$\vec{F}_H$ ↑ k ↓ $\vec{F}_k = m_k \cdot g$

Kraften från högen $\vec{F}_H = \boxed{\frac{Q_H \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} = E_H \cdot q$

Kraften från kulan $\vec{F}_k = m_k \cdot g$

Det elektriska fältet från en sfär: $E = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

$\vec{F}_H = \vec{F}_k \Leftrightarrow E_H \cdot q = m_k \cdot g \Leftrightarrow E_H = \frac{m_k \cdot g}{q}$

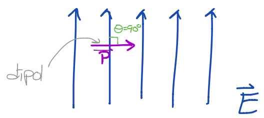
$\left\{ \text{SI-enheter: } m = 1 \cdot 10^{-6} g = 1 \cdot 10^{-3} kg,\ q = 1\,pC = 1 \cdot 10^{-12} C,\ g = 9.81 \right\}$ $E_H = 9.81 \cdot 10^3 \frac{V}{m}$

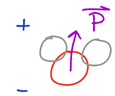
b) $E_H = \frac{Q_H}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Leftrightarrow Q_H = E_H 4\pi\varepsilon_0 r^2 = 1.1 \cdot 10^{-6}\ C$

r är avståndet till mitten av sfären från kulan sett, INTE radien på högen!

2.12

En vattenmolekyl i ett elektriskt fält ($E = 40\ k\frac{V}{m}$). Beräkna vridmomentet som verkar på vattenmolekylen när fältet är vinkelrätt mot molekylen.





P är storleken på dipolmomentet (på en vattenmolekyl). $P_{H_2O} = 6.2 \cdot 10^{-30}$ Cm

coulomb-meter

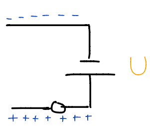
vridmoment

$\vec{T} = \vec{P} \times \vec{E} = P\hat{P} \times E\hat{E} = PE \sin\theta = 2.38 \cdot 10^{-25}$ Nm

finns olika, vi kör för ett sfäriskt koordinatsystem

3.2

Vi accelerar elektroner i ett oscilloskop från en katod till en elektrod. Elektroden har ett hål genom vilket elektroner kan passera.



a) Beräkna elektronens hastighet då $U = 3$ kV, vid den positiva plattan.

b) Efter hålet avtar inte hastigheten, varför?

$q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg

Lösning

a)

Potentiell energi: $W_p = q_e \cdot U$

Kinetisk energi: $W_k = \frac{m_e v^2}{2}$

Energiprincipen: $W = W_k + W_p$

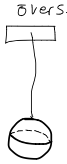
Vid den positiva plattan har all potentiell energi övergått till kinetisk. $W = W_p \longrightarrow W_k$

$$q_e \cdot U = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 q_e \cdot U}{m_e}} = 3.25 \cdot 10^7\ \frac{m}{s}$$

b) Det elektriska fältet mellan elektrod och katod går från + → -. Accelerationen är prop. mot kraften vilken i sin tur är proportionerlig mot e-fältet. Sen var det något mer...

3.7

En kula är fritt upphängd i luften. Kulans diameter är 12 cm, vilken är den högsta spänningen kulan kan ha innan överslag? Överslag fås då e-fältet är större än 20 $k\frac{V}{cm}$.



SI-enheter: $d = 0.12$ m $\Rightarrow r = 0.06$ m

$E_{Max} = 20 \cdot 10^2 \cdot 10^3\ \frac{V}{m}$

Lösning

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ Q &= C \cdot V \\ C &= 4\pi r \varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \quad E = \frac{4\pi r \varepsilon_0 \cdot V}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{V}{r} \Rightarrow V = Er = 120 \cdot 10^3\ V$$

kapasitans

medium utanför sfären, alltså samma ε_0 som i $E = \ldots$

Uppgifter

7.2, 3, 4

8.1

7.2)

En lång rak spole har 1000 varv per meter. Strömmen i spolen är 0.8 A. Beräkna den magnetiska flödestätheten i spolen om kärnan består av: a) luft
b) aluminium
c) järn

Givet

$\frac{n}{l} = 1000 \ \frac{varv}{m}$

$I = 0.8 \ A$

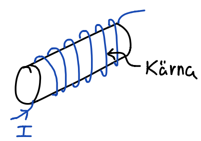
$\mu_l = 1$

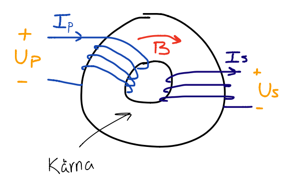
$\mu_a = 1.000022$

$\mu_j = 2 \cdot 10^3$

Sökt

B





$\frac{U_s}{U_P} = \frac{N_s}{N_P}$

$\frac{I_s}{I_P} = \frac{N_P}{N_s}$

Lösning

$B = \mu \frac{N \cdot I}{l} = \mu_0 \mu_r \frac{N \cdot I}{l}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

$B_l = \mu_l \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I = 1 \cdot 10^{-3} \ T$

$B_a = \mu_a \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I = 1.000022 \cdot 10^{-3} \ T$

$B_j = \mu_j \mu_0 \cdot \frac{n}{l} \cdot I = 2 \ T$

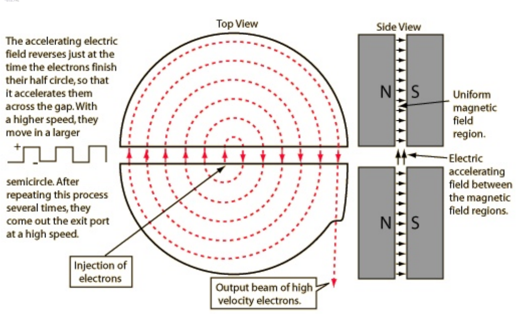
7.3)

7.3 En vanlig typ av partikelaccelerator som används i bland annat medicinska tillämpningar är cyklotronen. För att accelerera protoner till hastigheter uppemot 20% av ljusfarten får dessa löpa runt i en cirkulär bana i utrymmet mellan polerna på en elektromagnet. Med hjälp av ett oscillerande elektriskt fält, RF-fält, ger man varje varv protonerna ett litet farttillskott. Efterhand som protonernas fart ökar kommer dessa att röra sig i en spiralformad bana med ökande radie. När banradien överstiger diametern hos elektromagnetens poler lämnar protonerna acceleratorn.

a Hur starkt skall magnetfältet mellan polerna på elektromagneten vara för att protonerna skall kunna accelereras till 10% av ljusfarten innan de lämnar cyklotronen? Elektromagnetens poler har en diameter av 0,80 m. Räkna ickerelativistiskt.
$m_{proton} = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s

b För att protonerna skall kunna accelereras krävs att det oscillerande elektriska fältet ger "knuffar" i rätt ögonblick. RF-fältet skall därför ha samma frekvens som protonernas rotationsfrekvens. Härled ett uttryck för protonernas rotationsfrekvens som en funktion av magnetiska flödestätheten mellan elektromagnetens poler, B. Vilken frekvens skall RF-fältet ha för exemplet i uppgift a?

Tips: Rotationsfrekvensen visar sig vara oberoende av både banradien och protonernas hastighet.



Givet

$d = 0.80 \ m$

$m_{proton} = 1.67 \cdot 10^{-27} \ kg$

$c = 3.00 \cdot 10^8 \ \frac{m}{s}$

Sökt

B för att $V = 0.1 \cdot c \ \frac{m}{s}$

Samt f för att $V = 0.1 \cdot c \ \frac{m}{s}$

Lösning

1) Proton i vila mellan plattorna. Vila eftersom $V = 0$
2) Applicera negativ laddning på en platta => positiv laddning på den andra.
3) Switcha => acc ⟶ ut genom ett rör.

B-fältets påverkan

$F_B = q \cdot V \cdot B$

$F_c = \frac{mv^2}{r}$ Centripetalkraft vilken håller protonen i sin bana

a)

$q V B = \frac{mv^2}{r} \Leftrightarrow B = \frac{mv}{qr} = \frac{m \cdot 0.1c}{q^+ \cdot r} = 0.78 \ T$

b)

$f = \frac{1}{T}$ $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r} = 11.9 \cdot 10^6 \ Hz$

Tiden det tar att åka ett varv runt

$f = \frac{qB}{2\pi m}$

7.4)

7.4 Genom en lång rak koppartråd som hänger vertikalt flyter en viss ström, *I*. För att avgöra strömstyrkan placeras en liten kompass rakt norr om tråden. På grund av magnetfältet kring koppartråden pekar inte kompassen mot norr som den borde. Då avståndet från tråden till kompassen är 15 cm pekar kompassen istället åt NNO (≈ 22°). Antag att det jord-magnetiska fältet har en horisontell komposant riktad mot norr med magnetiska fältstyrkan $B = 50 \cdot 10^{-6}$ T.

a Ange strömmens riktning i koppartråden.

b Hur stor är strömmen, *I*, genom koppartråden?

Givet

$d = 15$ cm

Riktning = NNO 22°

$B_j = 50 \cdot 10^{-6}$ T

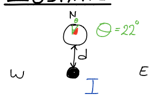
B horisontellt

Sökt

a) Riktning

b) I

Lösning

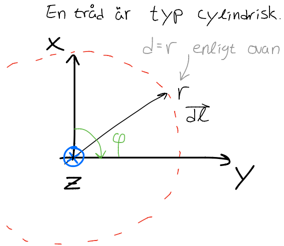


För att få en påverkan på kompassnålen måste vi ha ett fält vilket trycker nålen åt öst.
Vi kollar de två olika fallen.

1. Ström in: ⊗ => B ↺ ← Detta fält vrider nålen åt öster! Svar: I går in i tavlan.
2. Ström ut: ⊙ => ↻

b) Amperes lag: $\oint_L \vec{B} \cdot \vec{dL} = \mu_0 \cdot I_{enc}$

En tråd är typ cylindrisk.



$$\left.\begin{aligned}\vec{B} &= B \cdot \hat{\varphi} \\ \vec{dL} &= \hat{\varphi} dL\end{aligned}\right\} \quad \oint_L B \cdot \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \cdot dL = B \underbrace{\oint_L dL}_{\text{cirkelns omkrets}} = B \cdot 2\pi r$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I_{ENC} \Rightarrow I_{ENC} = I = \frac{B 2\pi r}{\mu_0}$$

$$B_T = B_j \tan(22°) = 50 \cdot 10^{-6} \tan(22°) = 20.2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$I = \frac{B_T 2\pi r}{\mu_0} = 15A$$

8.1)

8.1 Under de senaste åren har man uppmärksammat att det i människans omgivning finns variabla magnetfält som kan ge biologiska effekter. Det är därvid inte den magnetiska flödestätheten *B* utan troligen derivatan av *B* med avseende på tiden (*dB/dt*) som avgör den biologiska påverkan.

a I en rak lång enkelledare som är omgiven av luft flyter strömmen

$i = 5{,}0 \sin(2\pi ft)$ A

Beräkna *dB/dt* på avståndet 0,50 m från ledaren för de båda fall att frekvensen är 50 Hz respektive 5,0 kHz. Ange särskilt i vilket av fallen som amplituden av *dB/dt* är störst.

b I en rak lång dubbelledare som består av två parallella enkelledare på det inbördes avståndet 4,0 mm flyter strömmen

$i = 5{,}0 \sin(2\pi ft)$ A

i vardera enkelledaren. Dubbelledaren är omgiven av luft. De båda strömriktningarna är motriktade. Beräkna *dB/dt* på avståndet 0,500 m från dubbelledarens centrum i det plan som innehåller de båda ledarna. Gör beräkningen för de båda fall att frekvensen är 50 Hz respektive 5,0 kHz. Ange särskilt i vilket av fallen som amplituden av *dB/dt* är störst.

Givet

a) $i = 5.0 \sin(2\pi f t)$ A

$d = 0.5$ m

$f_l = 50$ Hz

$f_h = 5 \cdot 10^3$ Hz

b) dubbelledare

med 4.0 mm emellan

$i = 5\sin(2\pi f t)$ i vardera riktning

$d = 0.5$ m från centrum

$f_l = 50$ Hz

$f_h = 5 \cdot 10^3$ Hz

Sökt

a) $\frac{dB}{dt}$ @ d

b) $\frac{dB}{dt}$ @ d

Lösning

a) $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} 0.5\sin(2\pi f t)$

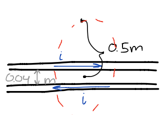
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot 5 \cdot 2\pi f \cdot \cos(2\pi f t) = \frac{5 f \mu_0}{r} \cdot \cos(2\pi f t)$$

Amplitud: $\frac{\mu_0 \cdot 5 f}{r}$

$f_l \Rightarrow 6.3 \cdot 10^{-4}$

$f_h \Rightarrow 6.3 \cdot 10^{-2}$

b)



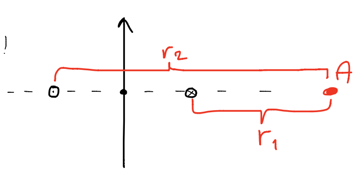
Använd superpositionen!

$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$\vec{B}_T = \hat{\varphi} B_1 + (-\hat{\varphi}) B_2$

$r_1 = 0.5 - \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2} = 0.498$ m

$r_2 = 0.5 + \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2} = 0.502$ m



$$\vec{B}_T = \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} - \hat{\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \hat{\varphi}\underbrace{\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot 5\sin(2\pi f t)}_{B}$$

$\frac{dB}{dt} = \left\{\begin{matrix}\text{se föregående} \\ \text{uppgift}\end{matrix}\right\}$

$f_1: 5 \cdot 10^{-6}$

$f_2: 5 \cdot 10^{-4}$

Material i magnetiska fält

Ferromagnetiska: $\mu_r \gg 1$

Järn, nickel, kobalt

Paramagnetiska: $\mu_r >= 1$

Behåller inte sin magnetiska förmåga när det externa fältet tas bort.

Platina, aluminium, syre

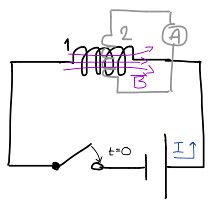
Diamagnetiska: $\mu_r <= 1$

Repelleras av magnetiska fält.

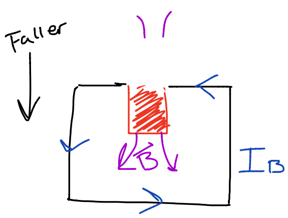
Superkonduktorer! Används i supraledare.

Kol, koppar, vatten, plast

Farraday's Lag



Precis vid på och avslag av brytaren fanns en ström i slinga 2.
Detta pga "transiens".

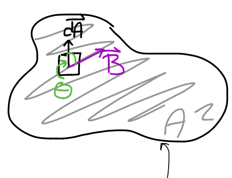


Lentz lag:

Den inducerade strömmen antar alltid den riktning vilken MOTVERKAR magnetfältet.

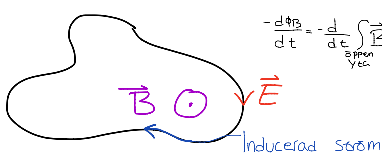
Hur stor strömmen kommer bli $\overbrace{\text{beror}}^{\text{i slinga 2}}$ på hur snabb förändringen är i slinga 1 och hur stor arean är för slinga 2.

Elektromagnetiskt flöde



$$\Phi_B = \int_{\text{öppen yta}} \vec{B}\, d\vec{A}$$

Om vi antar att detta är en vajer kommer vi inducera en ström i den.

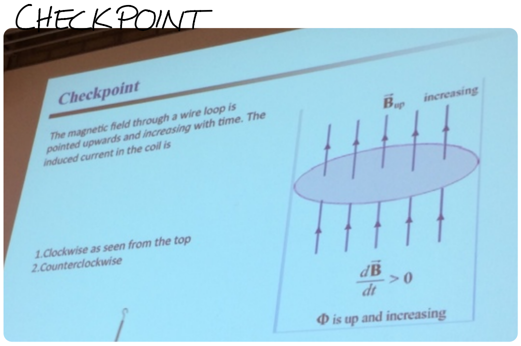


$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{öppen yta}} \vec{B}\, d\vec{A} = \oint_{\text{sluten slinga}} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Faraday's Law

$$\boxed{\oint \vec{E}\, d\vec{l} = \frac{-d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{A}}$$

CHECKPOINT



Clockwise!

Om flödet $<0 \Leftrightarrow \downarrow\downarrow\downarrow \; \frac{dB}{dt} > 0 \Rightarrow$ inducerad ström moturs

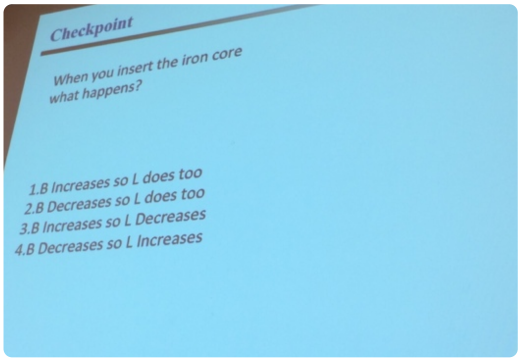
Självinduktans

$\Phi_B = L \cdot I$

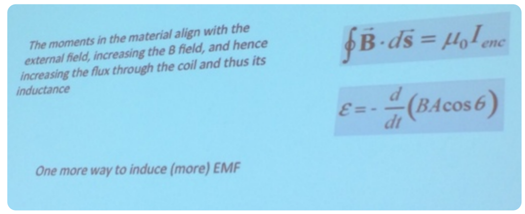
Faraday $\Rightarrow$ $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}$ → En spole med konstant ström kommer inte ha någon självinduktans

självinduktans

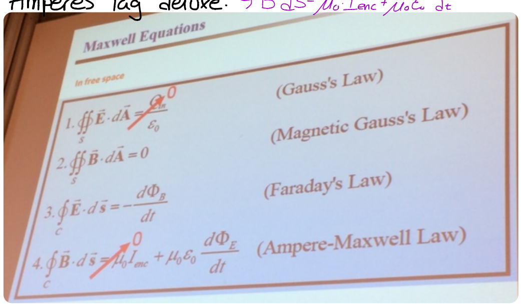
CHECKPOINT



1. B och L ökar.



Amperes lag deluxe: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I_{enc} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$



Elektromagnetiska Vågor

$E = \frac{hc}{\lambda}$

$p = \frac{h}{\lambda}$

h= Planck's konstant

$\lambda = \frac{c}{f}$

Ursäkta avsaknaden av anteckningar, men det här var tråkigt...

Elektromagnetiska vågor och vävnad

Det finns inga studier som visar på att microvågor kan gora annat än att värma upp.

Summering av kursen

LYCKA TILL OCH KÖR HÅRT!
Hoppas anteckningarna har varit till hjälp.

Begrepp:
Ström: $\frac{dq}{dt}$
Spänning: $\frac{dw}{dq}$
Resistans: $U = R \cdot I$
Kapacitans: $i = C\frac{du}{dt}$
Induktans: $u = L \cdot \frac{di}{dt}$

Kirchhoff's ström-/spänningslag: $\sum_{nod} i_k = 0 \;/\; \sum_{slinga} u_k = 0$
Ohm's lag: $U = R \cdot I$, $U = Z I$
Effekt: $p = u \cdot i$

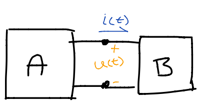
Reducering av kretsnät genom serie-/parallellkoppling

Växelström
$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$ V
$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta)$ I

Effekt: $P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\theta_u - \theta_i) = U_{RMS} I_{RMS} \cos(\theta_u - \theta_i)$ $\quad U_{RMS} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$
$Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin(\theta_u - \theta_i) = U_{RMS} I_{RMS} \sin(\theta_u - \theta_i)$
$S = P + jQ$

Exempel

Givet
$u(t) = 60 \cdot \cos(\omega t - 10°)$ V
$i(t) = 1.5 \cos(\omega t + 50°)$ A
Stationär växelström.



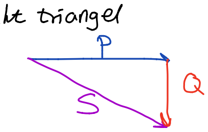
Sökt
Effektutvecklingen i B

Lösning
$i(t) \rightleftarrows I = 1.5\angle 50°$
$u(t) \rightleftarrows U = 60\angle{-10°}$
Samordnade ref.riht.

$S = P + Qj = \frac{1}{2} U \cdot I^* = \frac{1}{2} 60\angle{-10°} \cdot 1.5\angle{-50°} = 45\angle{-60°}$ W
Aktiv/medeleffekt $P = Re\{S\} = 45 \cdot \cos(-60°) = 22.5$ W $\quad P > 0 \Rightarrow$ B förbrukar effekt.
Reaktiv effekt $Q = Im\{S\} = 45 \sin(-60°) = -39.0$ VAr
Skenbareffekt: $|S| = 45$ VA
Effektfaktor: $\varphi = \cos(\theta_u - \theta_i) = \cos(-60) = 0.5$

Ström före spänning: Kapacativ impedans.

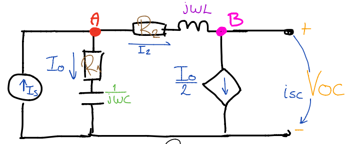
Effekt triangel



Exempel 2

Givet

Stationär växelströmskrets



$I_s = 15\angle 0° \ A$

$j\omega L = 3.0j \ \Omega$

$R_1 = 2.0 \ \Omega$

$R_2 = 4 \ \Omega$

$\frac{1}{j\omega C} = -4.0j \ \Omega$

Sökt

Thévenin

Lösning

V_{oc}

KCL_A: $I_s - I_0 - \frac{I_0}{2} = 0$

$I_s = \frac{3I_0}{2} \Leftrightarrow I_0 = \frac{2}{3} I_s$

KVL: $\frac{I_0}{2}(R_2 + j\omega L) + V_{oc} - I_0\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0$

$V_{oc} = I_0\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) - \frac{I_0}{2}(R_2 + j\omega L)$

$\underline{V_{oc} = 55\angle -90°}$

i_{sc} ger ekvivalent impedans $Z_{EQ} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}}$

KCL_A: $I_s = I_0 + I_2$

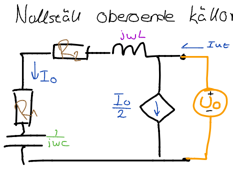
KCL_B: $I_2 = \frac{I_0}{2} + i_{sc}$

KVL: $I_2(R_2 + j\omega L) + 0 - I_0\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0$

$i_{sc} = \ldots$

$Z_{EQ} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}}$

Nollställ oberoende källor



"Lägg på" en påhittad U_0, vilken ström får du då?

$I_{ut} = I_0 + \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{2} I_0$

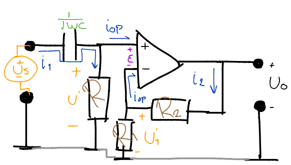
$U_0 = I_0\left(j\omega L + R_2 - R_1 + \frac{1}{j\omega C}\right)$

$Z_{EQ} = \frac{U_0}{I_{ut}} = 4 - \frac{2j}{3}$

Exempel

Frekvensberoende operationsförstärkare

Givet



Sökt

$A_v = \frac{U_0}{U_s}$

Lösning

Antag: Stationär växelström

Ideal OPF

Neg. återkoppling } $\varepsilon = 0$, $i_{op} = 0$

i_1 genom C och R => spänningsdelning möjlig.

$U' = U_s \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_s \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow U' = U_1'$

i_2 genom R_1 & R_2 => spänningsdelning

$U_1' = U' = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$U_s \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow \frac{U_0}{U_s} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

Skissa $A_v(\omega)$