CHALMERS
EXAMINATION / TENTAMEN

Course code/kurskod	Course name/kursnamn			
MVE085	Flervariabelanalys			
Anonymous code Anonym kod		Examination date Tentamensdatum	Number of pages Antal blad	Grade Betyg
MVE085 - 172		2015-10-29	4	

Solved task Behandlade uppgifter No/nr		Points per task Poäng på uppgiften	Observe: Areas with bold contour are to completed by the teacher. Anmärkning: Rutor inom bred kontur ifylles av lärare.
1			
2			
3	X	1	
4	X	1	
5	X	2	
6	X	3	
7	X	1	
8	X	3,5	
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
Total examination points Summa poäng		11,5	

Family name+First name (Blockletters)
Efternamn+Förnamn+Initialer(textas)
THORSELL ERIK E.T

Signature
Namnteckning

Year of Admission
Antagningsår

Programme acronym
Program

Date of Birth Year Month Day
Personnummer år mån dag

Identification no
nummer

Anonym kod	MVE085 Flervariabelanalys 2015-10-29	sid.nummer	Poäng
172		1	

Godkäntdelen: del 2

Till uppgift 3-6 nedan räcker det med kortare lösningsskiss direkt på tentan men för uppgift 7-8 skall fullständiga lösningar redovisas på separat skrivpapper.

3\. (a) Låt D vara ett område i $\mathbb{R}^3$. Vilka påståenden nedan är sanna om de sfäriska koordinaterna (R, θ, ϕ)? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange *2 alternativ*; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)

- **A** $dV = R^2\, dR\, d\theta\, d\phi$
- **B** $dV = R^2 \sin\phi\, dR\, d\theta\, d\phi$
- **C** $0 \leq \theta \leq \pi$
- **D** $0 \leq \phi \leq \pi$
- **E** $-\infty < R < \infty$

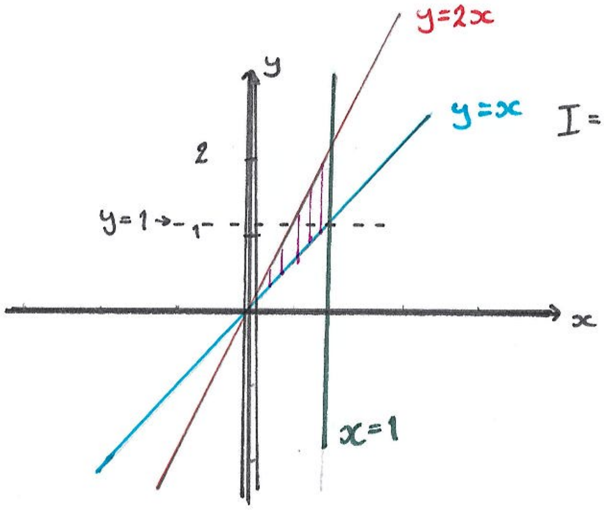
4\. Låt $\mathbb{F}$ vara en konservativ kraft med potential ϕ definierad på en öppen sammanhängande domän D i xy-planet. Vilka av följande påståenden stämmer för $\mathbb{F}$? Varje rätt svar ger 0.5p. Du får max ange *2 alternativ*; vid fler än 2 angivna alternativ blir det 0p. *Det räcker att ange svar; ingen motivering behövs här.* (1p)

(a)
- **A** Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativ så måste linjeintegralen över alla kurvor i D som sammanbinder två godtyckliga punkter i D att försvinna.
- **B** Arbetet som $\mathbb{F}$ uträttar längs en sluten kurva i D är noll.
- **C** Ekvipotentialkurvorna till $\mathbb{F}$ är alla vinkelräta mot fältlinjerna.
- **D** Vektorn $\nabla\phi(x, y)$ är vinkelrät mot vektorn $\mathbb{F}(x, y)$ i punkten (x, y).
- **E** Potentialerna ϕ och $\phi + c$, där c är en godtycklig funktion, motsvarar samma vektorfält.

5\. (a) Rita upp integrationsregionen i integralen $I = \int_0^1 \int_x^{2x} dydx$, och ändra integrationsordningen så att I skrivs som en integral över $dxdy$ istället. (2p)

TIPS: *När du byter ordning kommer I skrivas som summan av två separata integraler.*

Lösning:



Nya integrationsgränser/ordning blir

$$I = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} dxdy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dxdy$$

2

6. (a) Visa att $\mathbb{F}(x,y) = (3x^2-6y^2)\mathbf{i}+(-12xy+4y)\mathbf{j}$ är konservativ och ta fram en potential $\phi(x,y)$. (2p)

(b) Låt C vara kurvan i $\mathbb{R}^2$ som ges av $x = 1+y^3(1-y)^3$ där $0 \leq y \leq 1$. Bestäm arbetet som $\mathbb{F}(x,y)$ utövar längs C. (1p)

Lösning:

a) $\phi_x: x^3-6xy^2+C(y)$

$\phi_y: -6xy^2+2y^2+D(x)$

$\Big\}\ \phi(x,y) = x^3-6xy^2+2y^2+E$ $\quad E$ konst

Potential existerar! F konservativt !!

b) Startpunkt: $y=0 \Rightarrow x=1$ $(1,0)$

Slutpunkt: $y=1 \Rightarrow x=1$ $(1,1)$

$\phi(1,1)-\phi(0,0) = \cancel{\phi66} = 1-6+2-(1-0+0) = -3-1 = -4$

3

Svar: $\phi(x,y) = x^3-6xy^2+2y^2+E$, $W=-4$

7. (a) Använd Greens formel för att visa att interiören till ellipsen

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

har area πab. (3p)

8. Låt S vara den del av sfären $x^2+y^2+z^2=4$ som ligger utanför cylindern $x^2+y^2=1$ och låt $\mathbb{F}(x,y,z) = y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vara ett vektorfält.

(a) Beräkna flödet ut genom S av vektorfältet $\mathbb{F}(x,y,z)$. Du kan använda enhetsnormal $\hat{\mathbb{N}} = \frac{1}{2}(x,y,z)$ och det är rekommenderat att använda sfäriska koordinater; gränserna för ϕ blir: $\pi/6 \leq \phi \leq 5\pi/6$. Notera att $\cos 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2$ och $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$. (4p)

(b) Visa att flödet av $\mathbb{F}(x,y,z)$ genom mantelytan av cylindern $x^2+y^2=1$ är noll. (2p)

(c) Använd Gauss sats för $\mathbb{F}(x,y,z)$ för att beräkna volymen av regionen som ligger mellan S och cylindern $x^2+y^2=1$. (2p)

3

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: TIVE 085-172	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no / Löpande sid nr: 2 — Question no. / Uppgift nr: 7

Green: $\oint_C F\cdot dr = \iint_R F_1 dx + F_2 dy = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy$

Ellipsen: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Polära koordinater: $x = r\cdot\cos(t)$, $y = r\cdot\sin(t)$, $dxdy = r\cdot drdt$ $\quad 0 \le r \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\iint_R \left(\frac{(r\cdot\cos(t)-h)^2}{a^2} + \frac{(r\cdot\sin(t)-k)^2}{b^2}\right) r\cdot drdt =$$

$$\iint_R \left(\frac{r^2\cos^2(t) - 2rh\cos(t) + h^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2(t) - 2rk\sin(t) + k^2}{b^2}\right) r\, drdt =$$

$$\iint_R \frac{r^3\cos^2(t) - 2r^2h\cos(t) + rh^2}{a^2} + \frac{r^3\sin^2(t) - 2r^2k\sin(t) + rk^2}{b^2}\, drdt =$$

$$\iint_R r^3\cdot\frac{\cos^2(t)}{a^2} - r^2\cdot\frac{2h\cos(t)}{a^2} + r\cdot\frac{h^2}{a^2} + r^3\frac{\sin^2(t)}{b^2} - r^2\frac{2k\sin(t)}{b^2} + r\frac{k^2}{b^2}\, drdt =$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\cdot\frac{\cos^2(t)}{a^2} - \frac{r^3}{3}\frac{2h\cos(t)}{a^2} + \frac{r^2}{2}\frac{h^2}{a^2} + \frac{r^4}{4}\frac{\sin^2(t)}{b^2} - \frac{r^3}{3}\frac{2k\sin(t)}{b^2} + \frac{r^2}{2}\frac{k^2}{b^2}\right]_0^1 dt =$$

1

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t)}{4a^2} - \frac{2h\cos(t)}{3a^2} + \frac{h^2}{2a^2} + \frac{\sin^2(t)}{4b^2} - \frac{2k\sin(t)}{3b^2} + \frac{k^2}{2b^2}\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4a^2}\cos^2(t) - \frac{2h}{3a^2}\cdot\cos(t) + \frac{h^2}{2a^2} + \frac{1}{4b^2}\sin^2(t) - \frac{2k}{3b^2}\sin(t) + \frac{k^2}{2b^2}\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos(2t) - \frac{2h}{3a^2}\cdot\cos(t) + \frac{h^2}{2a^2} + \frac{1}{4b^2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\cos(2t)\right) - \frac{2k}{3b^2}\sin(t) + \frac{k^2}{2b^2}\, dt =$$

$$\left[\frac{1}{8a^2}\cdot\frac{\sin(2t)}{2} - \frac{2h}{3a^2}\cdot\sin(t) + \frac{h^2 t}{2a^2} + \frac{1}{8b^2}\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{2k}{3b^2}\cos(t) + \frac{k^2 t}{2b^2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$\left(0 - 0 + \frac{2\pi h^2}{2a^2} - 0 + \frac{2k}{3b^2} + \frac{k^2 2\pi}{2b^2}\right) - \left(0 - 0 + 0 - 0 + \frac{2k}{3b^2} + 0\right) =$$

$$\frac{\pi h^2}{a^2} + \frac{2k}{3b^2} + \frac{\pi k^2}{b^2} - \frac{2k}{3b^2} = \pi\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)$$

A for effort? :)

Njae, men 1 för Green.

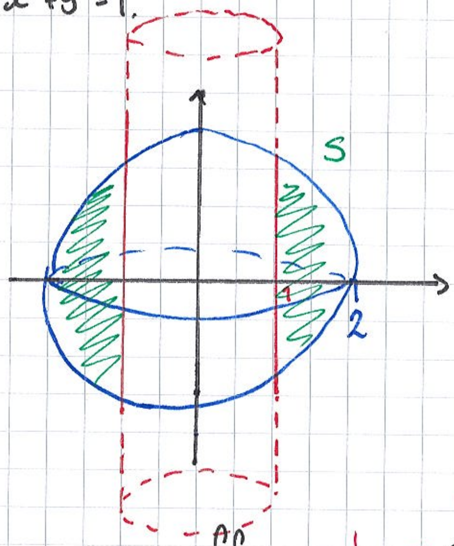
Greeffort?

3

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod: MVE085-172	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr 3 · Question no. / Uppgift nr 8

$S: x^2+y^2+z^2=4$ utanför cylindern $x^2+y^2=1$.
$F=(y,-x,z)$

$\iint_S F\cdot\hat{N}\cdot dS \qquad \hat{N}=\frac{1}{2}(x,y,z)$



för additionsformler för cos.

$$\iint_S F\cdot\hat{N}\cdot dS=\iint(y,-x,z)\bullet\tfrac{1}{2}(x,y,z)\,dS=\tfrac{1}{2}\iint xy-xy+z^2\,dS=\tfrac{1}{2}\iint z^2\,dS$$

Fattas en

Inför gränser senare för läsbarhetens skull.

Sfäriska koordinater: $x=R\cos\theta\sin\phi$, $y=R\sin\theta\sin\phi$, $z=R\cos\phi$, $dS=R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$

$1\le r\le 2$
$0\le\theta\le 2\pi$
$\pi/6\le\phi\le\frac{5\pi}{6}$

Hur?

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\iiint R^2\cdot\cos^2\phi\cdot R^2\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta$$

Hur blev dubbel = trippel?

$$\tfrac{1}{2}\iiint R^4\cdot\cos^2\phi\cdot\sin\phi\cdot dR\,d\phi\,d\theta=\tfrac{1}{2}\iiint R^4\cdot\frac{\cos(2\phi)}{2}\sin\phi\,dR\,d\phi\,d\theta=$$

$$\tfrac{1}{4}\iiint R^4\left(\tfrac{1}{2}\left(\sin(?\phi)+\sin(3\phi)\right)\right)dR\,d\phi\,d\theta=\tfrac{1}{8}\iiint R^4\left(\sin(3\phi)-\sin(\phi)\right)dR\,d\phi\,d\theta=$$

$$\tfrac{1}{8}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^2 R^4(\sin(3\phi)-\sin\phi)\,dR\,d\phi=\frac{2\pi}{8}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^2 R^4(\sin(3\phi)-\sin(\phi))\,dR\,d\phi=$$

$$\frac{2\pi}{8}\Bigg(\underbrace{\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^2 R^4\cdot\sin(3\phi)\,dR\,d\phi}_{1}-\underbrace{\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_1^2 R^4\sin\phi\,dR\,d\phi}_{2}\Bigg)=\left\{\frac{2\pi}{8}\left(1-2\right)\right\}^{3}$$

1) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[\frac{R^5}{5}\cdot\sin(3\phi)\right]_1^2 d\phi=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right)\sin(3\phi)\,d\phi=\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\frac{31}{5}\sin(3\phi)\,d\phi=$

$\displaystyle\frac{31}{5}\left[\frac{-\cos(3\phi)}{3}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6}=\frac{31}{5}\left(\frac{-\cos(\frac{\pi}{2})}{3}+\frac{\cos(\pi/6)}{3}\right)=\frac{31\cdot}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{31\sqrt{3}}{10}$

2) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left[\frac{R^5}{5}\cdot\sin(\phi)\right]_1^2 d\phi=\frac{31}{5}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\sin\phi\,d\phi=\frac{31}{5}\left[-\cos(\phi)\right]_{\pi/6}^{5\pi/6}=$

$\displaystyle\frac{31}{5}\left(-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{31}{5}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{31\sqrt{3}}{5}$

2

~~2/8~~

3. $\displaystyle\frac{2\pi}{8}\left(\frac{31\sqrt{3}}{10}-\frac{62\sqrt{3}}{10}\right)=\frac{-62\pi\sqrt{3}}{80}=\frac{-31}{40}\sqrt{3}\pi$

3

CHALMERS	Anonymous code / Anonym kod	Points for question (to be filled in by teacher) / Poäng på uppgiften (ifylles av lärare)	Consecutive page no. / Löpande sid nr
	MVE085-172		4
			Question no. / Uppgift nr 8

b) $F = (y, -x, z)$

Mantelytan av cylindern: $x^2 + y^2 = 1$ } Flödet $= 0$

0

Gauß säger: $\oiint_C F \cdot \hat{N}\, dS = \iiint_R \operatorname{div} F \, dV$

Hm?

$\operatorname{div} F = (y, -x, z) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = (0, 0, 1)$

Alltså finns inget flöde ut ur mantelytan! (Detta såg vi även i (a) när flödet i x-y-led = 0.)

c) $\iiint_R \operatorname{div} F \, dV = \iiint_R dV = \{\text{Sfäriska koordinater}\} =$

Gauß!

$\int_0^{2\pi} \int_0^{5\pi/6} \int_1^{2} R^2 \sin\phi \, dR\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{5\pi/6} \left[\frac{R^3}{3}\right]_1^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta =$

fel gränser.

$\int_0^{2\pi} \int_0^{5\pi/6} \frac{7}{3} \sin\phi \, d\phi\, d\theta = 2\pi \left[-\cos(\phi)\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14\pi}{3}\left(+\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{14\pi\sqrt{3}}{3}$

1 för Gauß.

och 0,5 för div F = 1.

Answer only one question on this page. Do not write on the back of this paper
Behandla endast en uppgift på detta blad. Skriv ej på baksidan